КІРІСПЕ

Математиканың барлық бөлімдерін дискретті және үзіліссіз деп шартты түрде бөлуге болады. Дискретті математика бұл – үзіліссіз ұғымын қоспағандағы негізгі ерекшелікпен жеке объектіледің зерттелінуі, яғни, үзіліссіздікке қарсы ұғым. Онда классикалық, «үзіліссіз» математикаға тән шектік көшу ұғымы жоқ. Дискретті математика математиканың ішінде және қолдануында туындаған дискреттік құрылымдарды зерттеуімен шұғылданады. Ол үзіліссіз математикадан бұрын, ерте дәуірде пайда болған.

Сайып келгенде, дискретті математика кең мағынада математиканың топологиялық әдісі қолданылмайтын, сонымен қатар үзіліссіздік ұғымы жоқ, барлық бөлімдерін қосады. Бұл – алгебраның барлық бөлімдері, математикалық логика, сандар теориясының барлығы (соның ішінде барлық мүмкін болатын компьютерлік арифметика), экономика-математикалық әдістердің барлық бөлімдері, комбинаторика және басқа пәндер.

Неғұрлым тар мағынада дискретті математика – математикалық логиканың, алгебраның, сандар теориясының, математикалық кибернетиканың информатиканың теориялық фундаментін біртіндеп құрастыратын бөлімі. Бұл тар мағынаға дискретті математика бульдік функциялар теориясын және олардың минимизациясын, графтар теориясын, алгоритмдер теориясын (соның ішінде есептеулердің күрделілік теориясын), криптография және кодтау теориясын жатқызады.

Жоғарыда аталған кейбір бөлімдері тек көп санды «ішкі» қолдануларды ғана емес, (ақпараттық жүйе немесе есептеуіш техника мамандарының көзқарастарымен) мысалы, программалаудағы әртүрлі дискретті құрылғылардың, және тағы басқалардың қолдануларында, олардың нәтижелері мен әдістері тәжірибеге қажет барлық есептерді шығаруға қолданады.

Мысалы, транспорттық есептерде, басқарудағы оптималды шешімдерді табу, жобаларды құруда және жоспарлауда «тар орындарды» бөлуде, оптималды кестелерді құруда, күрделі технологияларды, үрдістерді модельдеуде қолданылады.

Пәнді оқытудың мақсаты студенттерді ұғымдар жүйесімен және жиындар теориясының кейбір ең маңызды әдістерімен, математикалық логикамен бульдік функциялар теориясымен және графтар теориясымен таныстыру.

Пәнді меңгергендегі білім мен дағдыны «Информатика», «Программалау», «ЭЕМ да берілгендердің құрылымы және алгоритмі» және т.б. пәндерді оқуда қолданады.

Негізгі есеп, болашақ мамандар негізгі ұғымдарды айқын меңгеру және бульдік функциялар мен графтармен жұмыс істеуді қабылдау: графтардың оның инциденттілігі және аралас матрицасы бойынша диаграммасын құру (суретін) және кері есеп; графтардың изморфтылығын (бірдейлігін) құру; графтардың негізгі мінездемесі және қасиеті (дәрежелік вектор; планарлық, эйлерлік, гамильтондық); графтардың маңызды дербес жағдайлары – ағаштар және олардың қасиеттері; мәндер кестесін құру; фиктивті айнымалыларды іздеу және шығару; бульдік функцияларды стандартты түрге келтіру (ДҚФ,ҚҚФ, Жегалкин көпмүшелігі); булдік функцияларды минимизациялаудың негізгі әдістері

Қолданудың жеткіліксіз орындары турасында ештеңе айтылмаған. Бірақ, ондай мысалдар әдебиеттерде кездеседі.

1 1-3 ДӘРІСТЕР. ЖИЫН. ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРҒА ҚОЛДАНАТЫН АМАЛДАР, ҚАСИЕТТЕРІ. БИНАРЛЫ ҚАТЫНАС. БИНАРЛЫ ҚАТЫНАСТЫҢ МАҢЫЗДЫ ТҮРЛЕРІ.

1.1 Негізгі анықтамалар

Жиын әртүрлі объектілердің белгілі бір қасиеттерге байланысты жинақталуы. Объектілер жиыны ретінде бір топтағы студенттерді, натурал сандар жиыны, бір үйде тұратын адамдар жиыны т.с.с. Мысалы, ыдыстағы суды су тамшыларының жиыны деп қарастыра алмаймыз, себебі, су тамшыларын бөліп қарай алмаймыз.

Жиынды құрап тұрған жеке объектілер оның элементтері деп аталады. Жиынды белгілеу үшін латынның бас әріптері қолданылады: $A,S,X,\ldots$, жиынның элементтерін белгілеу үшін латынның кіші әріптері қолданылады: $a,s,x,\ldots$ x объектісі X жиынына тиісті екенін көрсету үшін $x\in X$ белгілеуі қолданылады. $x\notin X$ жазбасы x объектісі X жиынына тиісті емес деген белгілеу, яғни, x элементі X жиынының элементі емес.

X және Y жиындары тең болады, сонда және тек қана сонда егер олар бірдей элементтерден тұрса, яғни, $X = Y$, егер $x\in X$, онда $x\in Y$ және егер $y\in Y$, онда $y\in X$.

A жиыны B жиынының ішкі жиыны деп аталады, егер A жиынының кез-келген элементі B жиынында болса. Белгіленуі: $A \subseteq B$ (кей кезде бұл жиындар әр түрлі болса онда: $A\subset B$ деп белгіленеді). Тең жиындар және ішкі жиындар анықтамасын қолданып, $A = B <=> A \subseteq B$ и $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ екенін көруге болады. Осы пікірді «экстенсионалдық ұстанымы»

Жиын ақырлы деп аталады, егер оның элементтері ақырлы болса, және шексіз деп аталады, егер оның элементтер саны шексіз болса.

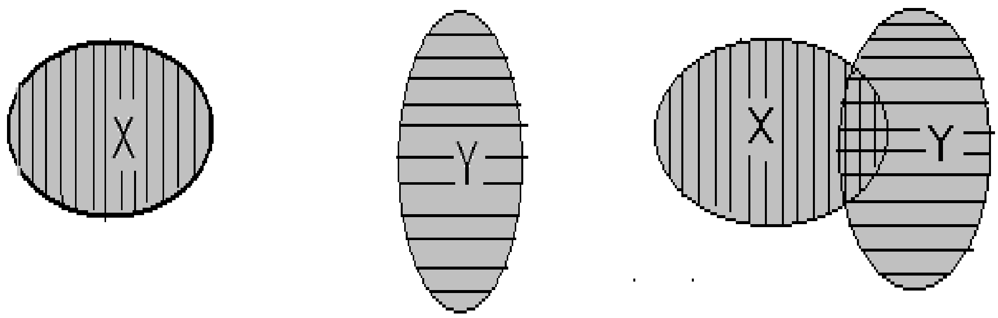
Егер жиын ақырлы болса, онда оның барлық элементтерін жазып шығуға болады: $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Жиынның барлық элементтерін жазып шығу-жиынның берілуінің бір түрі. Тек a элементі мен бір элементтен тұратын $\{a\}$ жиынын ажырата білу керек. Жиынның берілуінде элементтің орналасуы және неше рет жазылуы ескерілмейді. Мысалы, $\{a,2,3,n\}= \{n,a,2,3\}=\{2,n,a,a,2,3\}$, яғни біз алдыңғы тақытыртардың бірінде қарастыратын реттелген жиынтықпен шатастырмау керек. Жиынның келесі берілуі – оның құрамындағы барлық элементтердің қасиеттерін сипаттау арқылы берілуі. $P(x)$ – x элементінің қасиеті (осы элемент туралы сөйлем) болсын. Онда $\{x \mid P(X)\}$ (немесе $\{x : P(X)\}$) белгіленуі - $P(x)$ қасиетіне ие болатын ($P(x)$ орынды болатын) барлық x-тердің жиынын береді. Егер М- топтағы студенттер жиыны болса, онда Х – осы топтағы үздік студенттер жиыны былай жазылады: $X = \{x\in M \mid x$ – *үздік*$\}$, оқылуы: Х жиыны – М жиынының x-үздік студенттерінен құрылған жиын. Жай сандар жиыны былай жазылады: $X = \{x \mid x$ – *простое число*$\}$. Ешбір элементі жоқ жиын **бос** жиын деп аталады.

1.1 Лемма. *Бос жиын–жалғыз.*

Сондықтан, бос жиынды $\varnothing$ деп бір ғана таңбамен белгілеген ыңғайлы. Мысалы, М-кентаврлар жерінің тұрғындар жиыны болса, онда $M = X = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$ болады, мұндағы $\mathbf{Z}$ - бүтін сандар жиыны. Бос жиын шартты түрде ақырлы жиынға жатады.

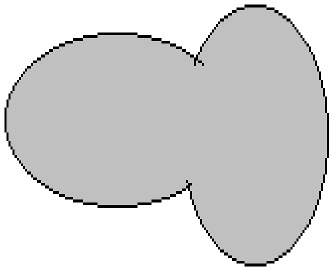
1.2 Жиындарға қолданылатын амалдар

Жиындарға қолданатын амалдар элементар алгебрадағы қосу, көбейту амалдарын еске салады. Амалдарды графикалық түрде көру үшін Эйлер-Венн деп аталатын диаграмма қолданамыз, яғни, кез-келген X жиыны ретінде жазықтықтың нүктелерінен тұратын тұйық жиын аламыз. 1.1 суретінде сол жақта (шартты түрде!) екі жиын жеке-жеке салынған, ал оң жақта осы жиындар біріктіріліп салынған.



1.1 сурет
Екі жиын жеке және бірге

1.2.1 X және Y жиындарының **бірігуі** (кейде қосындысы деп те айтады) деп осы X, Y жиындарының тым болмаса біреуіне тиісті болатын элементтерден тұратын жиынды айтамыз. Екі жиынның бірігуі $X \cup Y$ деп белгіленеді. Екеуінің бірігуі 1.1 суретте тым болмаса бір реет штрихталған бөлікті құрайды. 1.2 суреттегі боялған бөлік осы екі жиынның бірігуін көрсетеді. Белгіленуі: $X \cup Y = \{a \mid a \in X \text{ немесе } a \in Y\}$.

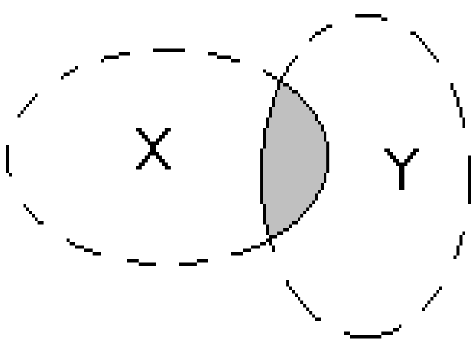


1.2 сурет
Жиындардың бірігуі

X_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ жиындарының бірігуі– әрқайсысы X_i жиындырының тым болмаса біреуіне тиісті болатын элементтердің жиынын айтамыз. Белгіленуі: $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$.

1.2.2 X және Y жиындарының **қиылысуы** деп X жиынына да Y жиынына да тиісті элементтер жиынын айтамыз. 1.3 суретте боялған бөлік қиылысуын білдіреді. Жиындардың қиылысуы $X \cap Y$ деп белгіленеді. Сонымен, $X \cap Y = \{a \mid a \in X \text{ және } a \in Y\}$.

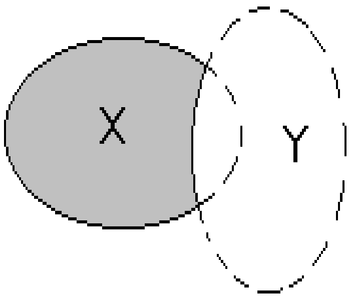
X және *Y* жиындары қиылыспайтын деп аталады, егер олардың ортақ элементтері болмаса, яғни, $X \cap Y = \varnothing$.



1.3 сурет Жиындардың қиылысуы

X_i $(i = 1,2,...,n)$ жиындарының қиылысуы деп X_i. –дің барлығына жататын элементтер жиынын айтамыз. Ол былай белгіленеді: $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$.

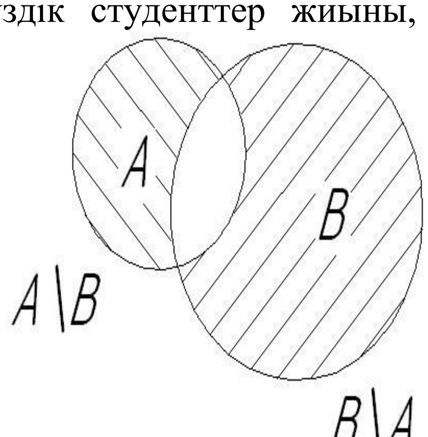
1.2.3 *X* және *Y* жиындарының **айырмасы** деп, *X* –ке тиісті ал, *Y* –ке тиісті емес элементтер жиынын айтамыз. 1.4 суретте жиындардың айырмасы боялған бөлік. («тістелген өрік»). Жиындардың айырмасы $X \setminus Y$ деп белгіленеді. Осы анықтаманы былайша беруге болады: $X \setminus Y=\{a \mid a \in X$ *және* $a \notin Y\}=\{a \mid a \in X$ *және* $a \in Y$ *деген ақиқат емес* $\}$



1.4 сурет Жиындар айырмасы

1.2.4 *X* және *Y* жиындарының **симметриялық айырмасы** деп, осы жиындардың біріне тиісті екіншісіне тиісті емес болатын элементтер жиынын айтамыз. 1.5 суретте штрихталған бөліктер. Симметриялы айырым $X \div Y$ арқылы белгіленеді. Анықтаманы былайша беруге болады: $X \div Y=\{a \mid$ *немесе* $a \in X,$ *немесе* $a \in Y\}=\{a \mid a \in X$ *немесе* $a \in Y$ *және* a *екі жиынға да тиісті деген жалған*$\}$.

Мысал 1.1 *X* – топтағы үздіктер жиыны, *Y* – жатақханада тұратын студенттер жиыны. Онда $X \cup Y$ – жиыны не үздік студенттер жиыны не жатақханада тұратын студенттер жиыны, $X \cap Y$ жиыны – жатақханада тұратын үздік студенттер жиыны, $X \setminus Y$ – жиыны жатақханада тұрмайтын үздік студенттер жиыны.

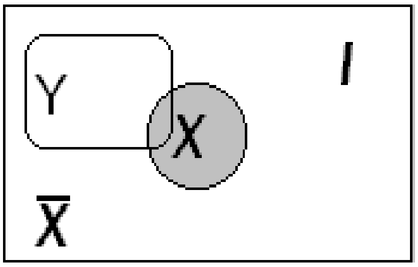


1.5 сурет А және В жиындарының симметриялық айырмасы

1.2.5 Кей жағдайларда **әмбебап** **(универсал)** жиын деп аталатын ұғым қолданамыз. Белгілі бір қасиетке ие жиындар ішкі жиындары болатын жиынды **әмбебап** жиын деп атаймыз. Мысалы теңдеуді, теңсіздікті шешу барысында $\boldsymbol{R}$ нақты сандар жиынын немесе $\boldsymbol{C}$ комплекс сандардың жиынын универсал жиын ретінде $\boldsymbol{R}$ немесе $\boldsymbol{C}$ жиынын алу ыңғайлы. 1.6 мысалда универсал жиын ретінде *S* барлық студенттер жиынын алуға болады немесе берілген ЖОО-ның студенттерін S_{EKSTU} немесе топтағы барлық студенттер жиынын алуға болады.

Әмбебап (универсал) жиынды тік төртбұрыштың нүктелер жиыны түрінде көрсеткен ыңғайлы. Әмбебап жиынның ішкі жиындары осы тіктөртбұрыштың ішінде болады.

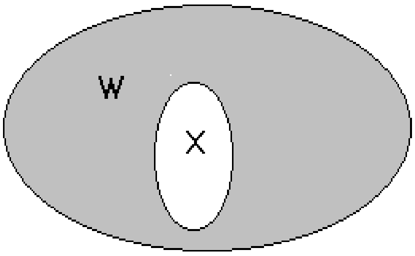
$\overline{X} = I \setminus X$ теңдігінен алынған $\overline{X}$ жиыны X жиынының (I әмбебап жиынға дейінгі) **толықтауышы** деп аталады. 1.7 суретте $\overline{X}$ жиыны боялмаған бөлік.



1.6 сурет Әмбебап жиын

1.2.6 Егер $X \subset W$ болса, X жиынының W жиынына қатысты толықтауышы деп, X қа тиісті емес W-ның элементтерінен тұратын жиынды айтамыз. Толықтауыш жиынның белгіленуі: $Z_W(X)$. 1.7 суретте $\overline{X}$ жиыны боялған бөлік.

1.2.7 Егер A – жиын болса, онда $P(A)$ арқылы оның **дәреже-жиыны** белгіленеді. Оның элементтері A жиынының барлық ішкі жиындары болып табылады, яғни, $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Мысалы: 1) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$; 2) егер $A = \{0\}$, онда $P(A) = \{\varnothing,\{0\}\} = \{\varnothing,A\}$; 3) ал егер $A =\{0,1\}$, онда $P(A)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}= \{\varnothing,\{0\},\{1\},A\}$.



1.7 сурет Толықтауыш жиын

1.3 Жиындарға қолданылатын амалдардың қасиеттері

1.3.1 Операциялардың негізгі қасиеттері.

Теорема 1.1 A,B,C, X, Y, Z – кез-келген жиындар болсын

1. Қиылысудың, бірігудің, симметриялы айырымның ауыстырымдылық заңы (коммутативтігі):

а) $A\cap B = B\cap A$;   *б)* $A\cup B = B\cup A$;   *в)* $A\div B = B\div A$.

2. Қиылысудың, бірігудің, симметриялы айырымның терімділік заңы (ассоциативтігі) :

а) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$;   *б)* $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$;   *в)* $A\div(B\div C) = (A\div B)\div C$.

3. Қиылысудың және симметриялық айырымның бірігуге қатысты үлестірімділік заңы (дистрибутивтігі):

а) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, *б)* $A\cap(B\div C) = (A\div B)\cap(A\div C)$.

4. Бірігудің қиылысуға қатысты үлестірімділік заңы (дистрибутивтігі):

$X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$.

5. Бірігу мен қиылысудың идемпотенттігі:

а) $X\cup X = X$; *б)* $X\cap X = X$.

6. Операциялардың өзара байланысы:

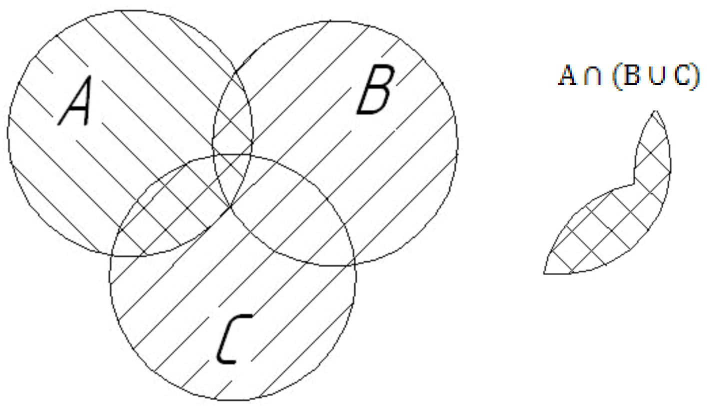
$A\div B = (A\setminus B)\cup(A\setminus B)$.

7. Бос жиынның қасиеті:

а) $X\cup\varnothing = X$; *б)* $X\cap\varnothing = \varnothing$; *в)* $X\setminus\varnothing = X\div\varnothing = X$.

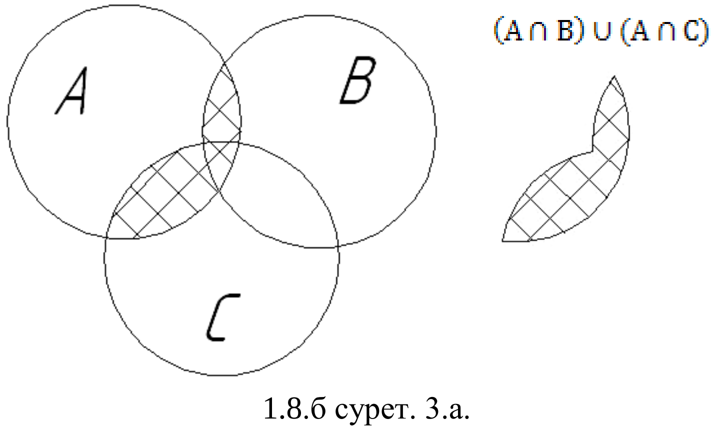
Дәлелдеу. 1а), 1б), 5, 6, 7 қасиеттері – анықтамадан шығады. 1в) – қасиеті 1б) және 6 қасиеттердің салдары.

3а қасиетін дәлелдейік: Эйлер-Венн диаграммасын салайық. Дәлелдейтін теңсіздіктің сол жағы үшін (1.8 сурет).



1.8.а сурет. 3.а.
теңдігінің сол жағы

Енді оң жағы үшін диаграмма 1.9 суретте. Алынған жиындар беттесетінін көреміз. Бірақ, бұл сәйкестік жуық мән.(көзбен көргенде ғана), сондықтан, бұл толық дәлел бола алмайды.



1.8.б сурет. 3.а.
теңдігінің оң жағы

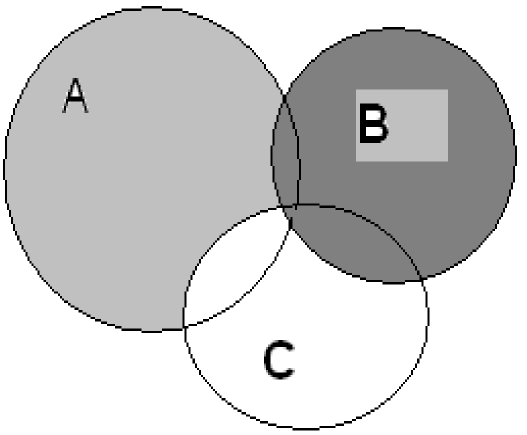
Қатаң дәлелдеу үшін экстенсионалдық қағидасын қолданамыз (1 бөлімді қара). Бірінші, сол жағындағы жиын оң жағындағы жиынның ішкі жиыны екенін дәлелдейміз, содан кейін керісінше.

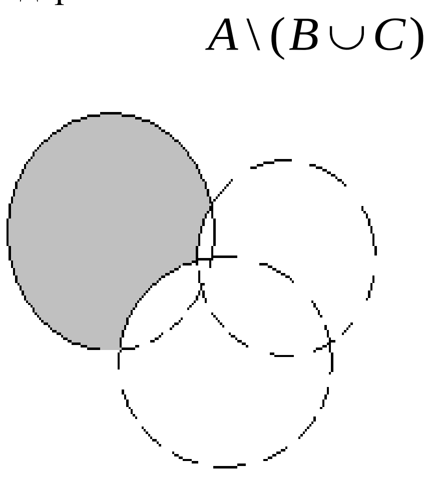
Сонымен, $A\cap (B\cup C)\subseteq (A\cap B) \cup (A\cap C)$. Мұнда «ішкі жиын болу» анықтамасын қолданамыз: сол жақтағы жиынның әр элементі оң жақтағы элементтің жиыны болатынын дәлелдейміз. x – сол жағының кез-келген элементі болсын, яғни, $x\in A \cap (B\cup C)$. x – қиылысудың элементі болғандықтан, қиылысудың анықтамасы бойынша ол әрбір жиынға тиісті болу керек, яғни, $x\in A$ және $x\in B\cup C$. $x \in B\cup C$ болғандықтан, бірігудің анықтамасы бойынша $x\in B$ немесе $x\in C$, яғни, $x\in A$ және $(x\in B$ немесе $x\in C)$. Соңғы күрделі бекітілімнен ($x\in A$ және $x\in B$) немесе ($x\in A$ және $x\in C$) екендігі шығады. Бұдан қиылысудың анықтамасы бойынша, $x\in A \cap B$ немесе $x\in A\cap C$. Енді, бірігудің анықтамасы бойынша: $x\in (A \cap B) \cup (A\cap C)$. x –сол жағының кез-келген элементі болғандықтан, сол жағының кез-келген элементі оң жағына тиісті болатынын көреміз, яғни $A\cap (B\cup C)\subseteq (A\cap B) \cup (A\cap C)$ – қатынасы орынды. Бұл жазбаны қысқаша былай көрсетуге болады:

$\subseteq$) $x\in A \cap (B\cup C) \Rightarrow_1 x\in A$ және $x\in B\cup C \Rightarrow_2 x\in A$ және $(x\in B$ немесе $x\in C) \Rightarrow_3$ ($x\in A$ және $x\in B$) немесе ($x\in A$ және $x\in C) \Rightarrow_4 x\in A \cap B$ немесе $x\in A\cap C \Rightarrow_5 x\in (A \cap B) \cup (A\cap C)$; мұндағы № 1,4 бағыттар қиылысудың анықтамасына сәйкес, № 2,5 бағыттар –бірігудің анықтамасына сәйкес, ал 3-бағыт логикалық заң (4.2 бөлімді қара).

$\supseteq$) - кері бекітілімі оң жағындағы жиын сол жағындағы жиынның ішкі жиыны екенін осыған сәйкес жолмен дәлелдеуге болады. Бірақ бұл жағдайда басқаша, жеңіл түрде көрсетуге болады: көрсетілген дәлелдеуде көрсетілген бағыттар солдан оңға қарай ғана емес, керісінше де орынды, яғни олар екі жақты бағыттар. Шынында да, № 1,2,4 және 5 бағыттарға анықтамалар қолданғандықтан, олар үшін кері жозба да орынды, ал № 3 – логикалық эквиваленттік.

Жаттығу 1.1 Басқа қасиеттерді дәлелдеңіздер.



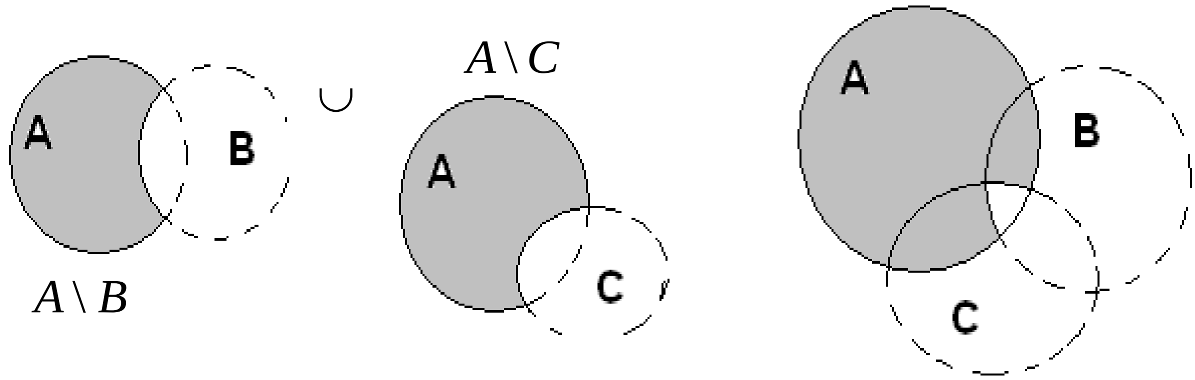


1.9 сурет.
Теңдіктің сол жағы

Ескерту. Барлық бағыттар екі жақты бола бермейді! Анықтама қолданылса да (сирек те болса) кері бағыттар дұрыс болмайтын жағдайлар бар, ал көп логикалық заңдар біржақты. Сондықтан әр бағыттың кері жағын анықтап алу керек, қажет болса, екіжақтылығын бөлек дәлелдеу керек.

1.3.2 Мынадай сұрақ туындауы мүмкін: 3а) қасиетін сызба арқылы дәлелдеу қатаң бола алмайтын болса, не үшін керек болды? Осы сұрақты түсіну үшін келесі мысалды қарастырамыз.

Мысал 1.2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ теңдігі орынды ма, анықтау керек. Егер дұрыс емес болса, оны қалай жөндеуге болады? Түсінікті болу үшін сол жағын сызба арқылы көрсетейік: 1.9 суреттің сол жағында A жиыны сұр түсті боялған, B – қара, C – ақ түсті. Онда сол жағындағы $A \setminus (B \cup C)$ жиыны - қара түске және ақ түске енбейтін сұр түстегі нүктелер жиыны («екі рет тістелген өрік»). Оң жағының жиынын саламыз:



1.10 сурет. Оң жағы

Басқа қалып шықты, «ойық өрік». Бірақ бұл біздің айтқанымыздай, көзбен көрінгені. Теңдіктің жалғандығын көру үшін мысал құрамыз . 1.9 және 1.10 суреттер бізге көмек береді. Суреттерден көргеніміздей, егер A және B жиындарының C –да жоқ ортақ элементтері болса, онда теңдік бұзылады. Мысалы: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{4,5,6\}$. Онда $A \setminus (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1,2\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$.

Шынымен де, теңдік жалпы жағдайда дұрыс емес. Көрсетілген мысалдағы суреттен: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ және $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ болжамын жасауға болады.

Жаттығу 1.2. Соңғы сөйлемді дәлелдеп көріңіздер.

Жаттығу 1.3**.** Қай теңдіктер орынды; егер дұрыс емес теңдік болса, оны қалай жөндеуге болады: а) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

в) Айырма операциясы коммутативті бола ма?

1.3.3 I әмбебап жиыны болған жағдайдағы операциялардың негізгі қасиеттері. Кез-келген ішкі жиындар мен әмбебап жиын үшін орынды теңдіктер:

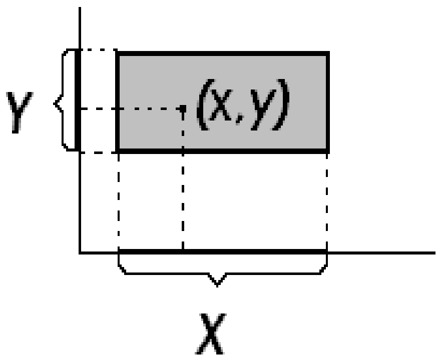
1. $X \cap \overline{X} = \varnothing$; 2. $X \cup \overline{X} = I$; 3. $\overline{\overline{X}} = X$.; 4. $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$; 5 $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$; 6. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Жаттығу 1.4. Теңсіздікті дәлелдеңіз.

1.4 Жиындардың декарттық көбейтіндісі, бинарлы қатынастар

1.4.1 Жиындағы n элементтің тізбегі ***n-дік тізбек*** немесе (n элементтен тұратын) ***кортеж*** деп аталады. n-дікте әр элементтің өз орыны болады, ал жиында элементтердің орналасу реті ескерілмейді. Мысалы, $a \neq b$ үшін реттелген жұп (a,b) немесе (b,a) әртүрлі болады. (кей кезде реттелген жұп $\langle a,b\rangle$ деп те белгіленеді), $\{a,b\} = \{b,a\}$

X және Y жиындарынан құралған реттелген (x,y) жұптарының жиынын **декарттық** немесе **тура көбейтінді** деп айтады. Ол $X \times Y$ деп белгіленеді. Сонымен, декарттық көбейтіндінің элементтері ұзындығы екіге тең (x,y) түріндегі барлық мүмкін болатын кортеждер болады.



1.11 сурет.
Жиындардың декарттық
көбейтіндісі

Декарттық көбейтіндінің геометриялық сипаты 1.11 суретте көрсетілген, мұнда X және Y жиындары нақты өстердегі кесінділер түрінде берілген. Ал $X \times Y$ тура көбейтіндісі – боялған тік төртбұрыш түрінде көрсетілген.

1.3 мысал. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ және $Y = \{y_1,y_2,y_3\}$ болсын. Онда $X \times Y$ декарттық көбейтіндісін 1.1 кестесі түрінде беруге болады.

1.1 кесте. Декарттық көбейтудің мысалы

X \ Y	y_1	y_2	Y_3
x_1	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	(x_1,y_3)
x_2	(x_2,y_1)	(x_2,y_2)	(x_2,y_3)
x_3	(x_3,y_1)	(x_3,y_2)	(x_3,y_3)
x_4	(x_4,y_1)	(x_4,y_2)	(x_4,y_3)

X_1, X_2, ... X_n жиындарының декарттық көбейтіндісі деп $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ деп белгіленетін және бірінші компоненті X_1-ге тиісті, екіншісі- X_2 –ге тиісті, т.с.с. болатын n –дікті (ұзындығы n –ге тең кортежді) айтамыз.

1.4.2 Жиындар теориясын тәжірибелік сабақтарға қолдануда элементтері арасында қандайда бір қатынастар анықталған жиындарды қарастыруға тура келеді. Мысалы, полктің офицерлер жиынында қандайда бір *(a,b)* элементтер жұбы үшін «*a* офицері *b* офицерімен бір ротада қызмет етеді» келесі бір жұп үшін «*a* офицерінің шені *b* офицерінің шенінен жоғары», үшінші жұп үшін «*a* офицерінің шені *b* офицерінің шенімен бірдей». Бұл бекітілімдердің әрқайсысы *a* мен *b* офицерлерінің арасындағы қандай да бір қатынасты береді. (бірге қызмет етуі, қызметі, лауазымдылығы, шенінің теңдігі). Қатынас мысалы ретінде сандық-теориялық немесе жиындық-теориялық немесе геометриялық қасиеттері «...қарағанда ... кем», «... ...бөлінеді», «... ішінде ...», «... мен ... конгруэнтті» деген предикаттар болуы мүмкін.

Келтірілген мысалдарда бір ғана жиынның элементтері арасындағы қатынастар жайында айтылды. Әртүрлі жиындардың элементтері арасындағы қатынастар (нақтырақ, сәйкестік) туралы да айтуға болады, мысалы, «*a* офицері *b* ротасында қызмет етеді» бекітілімі офицерлер жиыны мен роталар жиыны арасындағы сәйкестікті береді.

Сәйкестік ұғымын нақтылау үшін элементтердің реттелген жұбы, үштігі, *n*-дігінен, яғни, кортеждерден құрылған жиын туралы қарастырамыз.

Бинарлы қатынас деп $X\times Y$ жиынының қандайда бір ішкі жиынын айтамыз. Бұл жағдайда X пен Y жиындарының арасында бинарлы қатынас (сәйкестік) орнатылған деп айтады. Бұл символдық түрде былай жазылады:

$(x,y)\in R$ немесе жазбаның басқа түрі xRy, мұндағы $x\in X$, $y\in Y$, R – $X\times Y$ жиынының нақты бір ішкі жиынын көрсететін қатынас белгісі.

Тернарлы қатынас (сәйкестік) $X\times Y\times Z$ декарттық көбейтудің элементтері болатын реттелген үштік жиынының ішкі жиынын айтамыз.

***n*-дік қатынас** (сәйкестік) $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ декарттық көбейтудің элементтері болатын реттелген *n*-дік жиынның ішкі жиыны.

1.5 Бинарлы қатынастың түрлері мен қасиеттері

Көбінде, мысалы, графтар теориясында негізінде бинарлы сәйкестік қарастырылады, сондықтан, сәйкестікті осы түрде ғана қарастырумен шектелеміз.

1.5.1 Егер X пен Y жиындары бинарлы сәйкестікте беттессе, онда X **жиынының элементтері арасындағы қатынас** туралы айтады. Қатынастың негізгі қасиеттерін қарастырайық.

1. X жиынында R қатынасы **рефлексивті** деп аталады, егер кез-келген $x\in X$ элементі үшін: xRx орынды болса (басқаша айтсақ, $(x,x)\in R$).

2. X жиынында R қатынасы **антирефлексивті** деп аталады, егер кез-келген $x\in X$ элементі үшін xRx орынды болмаса (басқаша айтсақ, $(x,x)\notin R$).

3. X жиынындағы элементтер арасында R қатынасы **симметриялы** деп аталады, егер кез-келген $x,y\in X$ элементтері үшін: $xRy \Rightarrow yRx$ орынды болса (басқаша айтсақ, $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$) ($(x,y)\notin R$).

4. X жиынындағы элементтер арасында R қатынасы **антисимметриялы** деп аталады, егер кез-келген $x,y \in X$ элементтері үшін: xRy және $yRx \Rightarrow x = y$ орынды болса (басқаша айтсақ, $(x,y) \in R$ и $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$).

5. X жиынындағы элементтер арасында R қатынасы **транзитивті** деп аталады, егер кез-келген $x,y,z \in X$ элементтері үшін: xRy, $yRz \Rightarrow xRz$ (басқаша айтсақ, $(x,y) \in R$ және $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$).

Транзитивті қатынасқа параллелдік, теңдік, «артық» қатынастары мысал бола алады. Перпендикулярлық, теңсіздік қатынастары транзитивті емес қатынас болады.

1.5.2 Әрбір R қатынасы үшін R^{-1} **кері қатынас** анықтауға болады. Бұл анықтаманы қысқаша былай беруге болады:

$R^{-1} = \{(x,y) | \, xRy\} = \{(x,y) | \, (y,x) \in R\}$.

Мысалы, «x элементі y-тің бөлгіші болады» қатынасы үшін кері қатынас «y элементі x-ке еселі», «x элементі y –тен артық» қатынасына кері «y элементі x–тен кем».

Нөлдік қатынас деп жиынның бір жұбына да орындалмайтын қатынасты айтамыз. **Әмбебап** (бірыңғай) қатынас жиынның кез-келген жұбына орындалатын қатынасты айтамыз.

R –ге қатысты $\overline{R}$ **Толықтауыш** қатынас деп $(x_1,x_2) \in \overline{R} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \notin R$ орынды болатын қатынасты айтамыз.

1.5.3 Қатынастың негізгі түрлерін қарастырамыз.

1. X жиынының элементтері арасындағы рефлексивті, симметриялы және транзитивті болатын $R \subset X \times X$ қатынасы **эквиваленттік қатынас** деп аталады. Және $x_1 \sim x_2$, немесе $x_1 \equiv x_2$, немесе $x_1 \approx x_2$, $x_1 \cong x_2$, $\eqsim, \simeq$ т.с.с. белгілеулер арқылы көрсетіледі. Эквиваленттік қатынасқа евклид кеңістігіндегі векторлардың теңдігі, евклид геометриясындағы фигуралардың теңдігі мысал бола алады.

X жиынының $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ ішкі жиындарына **бөлшектелінуі** деп келесі шарттарды қанағаттандыратын жиынды айтамыз:

1) $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots , n$;

2) $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$ болғанда;

3) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$.

1.2 лемма *(эквиваленттік кластарға бөлшектеліну туралы). Жиында берілген кез- келген эквивалент қатынас осы жиынды қиылыспайтын ішкі жиындарға бөледі. Кері тұжырым да орынды: жиынның әрбір қиылыспайтын ішкі жиындарға бөлшектенуі қандайда бір эквиваленттік қанынасты анықтайды.*

Мысалы, бір факультеттің курстары факультеттегі студенттер жиынының бөлшектенуі болып табылады. Ал сол курстың топтары – курстың студенттер жиынының бөлшектенуі болып табылады. $\sim$ эквиваленттік қатынасты беретін бөлшектену келесідей анықталады: егер x пен y элементтері эквивалент болса, яғни, $x,y \in X_i \Leftrightarrow x \sim y$, онда x пен y элементтері бөлшектенудің бір ішкі жиынына түседі. Бұл ішкі жиындар **эквиваленттi кластар** деп аталады.

Мысалы, «бір қалада тұру» қатынасы елдің тұрғындар жиынында бір қаланың тұрғындарынан тұратын қиылыспайтын ішкі жиындарға бөлшектейді.

2. Қатынас **бөлшек реттелу** деп аталады, егер ол рефлексивті немесе антирефлексивті, антисимметриялы және транзитивті болса. Егер қатынас антирефлексивті болса, онда рет (порядок) **қатаң** деп айтады; ол рефлексивті болса, онда – қатаң емес рет (порядок). Мысалы, «$x_1 \geq x_2$» қатынасы нақты сандар жиынында және «$X \subseteq Y$» $P(A)$ дәреже-жиындарда қатаң емес ретті қатынас болады. Ал «$x_1 > x_2$» және «$X \subset Y$» – қатынастары қатаң бөлшек реттелу.

Сондықтан, бұл қатынас қатаң ретті жағдай үшін $>, <, \sqsubset, \sqsupset$ таңбаларымен таңбаланады және $\sqsubseteq, \sqsupseteq, \geq, \leq$ қатаң болмаса.

3. R сызықты ретті қатынас деп бөлшек реттелу қатынасының қосымша толықтылық қасиетіне ие қатынасты айтамыз: X жиынының кез-келген (x,y) жұбы үшін келесі үш қатыстардың бірі орындалу керек: xRy немесе yRx немесе $x = y$.

1.6 Айрықша бинарлы қатынастар- функциялар

X пен Y – бос емес жиындар болсын. Кез-келген (немесе, тек қандайда бір) $x \in X$ элементіне G заңы бойынша $y \in Y$ бір ғана (!) элементі сәйкестікке қойылса, онда X **–те** анықталға және Y –те мән қабылдайтын X-тің X -тің Y-ке **бірмәнді бейнелеуі** (немесе X ішкі жиынында анықталған функция) деп айтамыз. Бейнелеуді әдетте барлық жерде анықталған сәйкестік деп есептейді, ал функция –міндетті емес. Қандай жағдай болмасын G -ді X пен Y жиындары арасындағы бинарлы қатынастардың дербес жағдайы деп қарастыруға болады, яғни $G \subseteq X \times Y$.

Келесі жазба түрі қолданылады:

$$G: X \to Y \text{ немесе } y = G(x),\ x \in X,\ y \in Y.$$

Бірмәнді сәйкестік (функция) жағдайында $y = G(x)$ элементі x элементінің **бейнесі** деп атайды .

Көпмәнді бейнелеу жағдайы **(функциялар)** бірмәнді түрге келтіріледі: бұл жағдайда әрбір (қандайда бір) $x \in X$ үшін G бейнелеуі қандайда бір $G(x) \subset Y$ ішкі жиынды сәйкестікке қояды, яғни $P(Y)$ дәреже-жиынының қандайда бір элементі, яғни, Көпмәнді бейнелеу X пен $P(Y)$ жиындары арасында болады. Мұнда x элементінің бейнесі $G(x)$ ішкі жиыны болады.

X пен Y жиындары беттессе, онда $G: X \to X$ бейнелеуі X жиынының өзіне –өзін бейнелеу болады және $G \subset X \times X$. Осындай бейнелеуді графтар теориясында қарастырады. Оларға қолданатын бірнеше операцияларды ғана қарастырамыз.

G мен H – сәйкесінше, X -ті Y –ке және Y -ті Z-ке бейнелеулері болсын. Осы бейнелеулердің **композицисы** деп, $GH(x) = G(H(x))$ түрінде анықталатын GH (немесе $G \circ H$, немесе $G{*}H$) бейнелеуін айтамыз.

$H = G$ болған дербес жағдайда $G^2(x) = G(G(x))$, $G^3(x) = G(G^2(x))$ бейнелеулерін аламыз және кез-келген $S \geq 2$ үшін: $G^S(x) = G(G^{S-1}(x))$.

Талдауды жалпылау үшін $G^0(x) = x$ қатынасын енгіземіз. Онда былай жазуға болады: $G^0(x) = G(G^{-1}(x)) = GG^{-1}(x) = x$.

Ескертпе. $G^{-1}(x)$ кері бейнелеу дегенді білдірмейді. Неліктен?

2 4-5 ДӘРІСТЕР. БУЛЬ АЛГЕБРАСЫ. ПІКІРЛЕР ЛОГИКАСЫНДАҒЫ ДӘЛЕЛДЕУ ӘДІСТЕРІ. БУЛДІК ФУНКЦИЯЛАР РЕТІНДЕГІ КҮРДЕЛІ ПІКІРЛЕР. ПІКІРЛЕРДІ ЕСЕПТЕУДЕГІ ТОЛЫҚТЫЛЫҚ ТУРАЛЫ ТЕОРМА.

2.1 Буль алгебрасы

A,B,C – X жиынының кез-келген ішкі жиыны болсын, яғни $A,B,C\in P(X)$. 1.3 те көрсеткеніміздей келесі теңдіктер орынды:

1. Қиылысу мен бірігудің коммутативтілігі: *а)* $A\cap B = B\cap A$, *б)*$A\cup B = B\cup A$.

2. Қиылысу мен бірігудің ассоциативтілігі: *а)* $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$; *б)* $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$.

3. Қиылысудың және симметриялық айырымның бірігуге қатысты үлестірімділік заңы (дистрибутивтігі):

а) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, *б)* $A\cap(B\div C) = (A\div B)\cap(A\div C)$.

5. Бірігу мен қиылысудың идемпотенттігі:

а) $X\cup X = X$; *б)* $X\cap X = X$.

7. Бос жиынның қасиеті:

а) $X\cup\varnothing = X$; *б)* $X\cap\varnothing = \varnothing$; *в)* $X\setminus\varnothing = X\div\varnothing = X$.

8. Толықтауыштың қасиеті: *а)* $A\cap\overline{A} = \varnothing$; *б)* $B\cup\overline{B} = X$; *в)* $\overline{\overline{A}} = A$; *г)* $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$; *д)* $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$, толықтауыш X жиынына қатысты алынады. (1.2. бөлімді қара).

Сонымен, бірігу, қиылысу, толықтауыш операцияларымен берілген дәреже-жиын (жиынның) **буль алгебрасы** деген жүйені құрайды. Жалпылап айтсақ, I – $\sqcap$ және $\sqcup$ операциялары анықталған, екі айнымалысы бар C бір операциясы бір айнымалыдан тұратын және 0 және 1 элеменнттері көрсетілген бос емес жиын болсын. Онда I жиынынан, $\sqcap$, $\sqcup$, C операцияларынан, 0 және 1 элементтерінен тұратын жүйе буль алгебрасы деп аталады, егер 1-8 қасиеттерінде A, B, C –ның орнына I-дің кез-келген элементтері үшін орындалса, бірігу, қиылысу, толықтауыш операцияларының орнына $\sqcap$, $\sqcup$, C болса, бос жиынның орнына -0, ал X –тің орнына 1 алынатын болса.

2.2 Пікірлер алгебрасы

Математикалық логиканы оқуды әртүрлі логикалық есептеулерді (предикаттар логикасы, ықтималдық логикасы, т.с.с.) негіздейтін пікірлер алгебрасынан бастаймыз. Пікірлер алгебрасы қандайда бір дискретті құралғыны сипаттайтын үлгі құрудың негізі ретінде жеке қызығушылық тудырады.

Пікір деп ақиқат немесе жалған екенін айтуға болатын, бірақ бір уақытта екеуі де орындалмайтын хабарлы сөйлемді айтамыз.

2.1 мысал. 1. Волга Каспий теңізіне құяды 2. Екі үштен артық. 3. Мен өтірік айтып тұрмын.

1, 2 мысалдар пікір болады (1 –ақиқат, 2 – жалған). 3 – пікір емес (егер ол ақиқат деп болжасақ, онда оның мағынасына орай бір уақытта жалған болып кетеді, және керісінше, бұл сөйлемнің жалғандығынан оның ақиқаттығы шығады).

Бұл **жалған сөйлеушінің парадоксі** деп аталады.

Пікірлер алгебрасында пікірдің ішкі құрылымы қарастырылмайды, тек оның ақиқат немесе жалған екенін анықтайтын қасиетін ғана қарастырамыз. Сондықтан пікірді «ақиқат» не «жалған» деген екі мәннің бірін қабылдайтын шама деп қарау керек.

Пікірлерді $A,B,C,...$, деп белгілейміз, ал олардың мәндерін яғни, ақиқат не жалғандығын 1 және 0 сандарымен белгілейміз.

Қарапайым сөйлеуде күрделі сөйлемдер «және», «немесе», «егер…онда…» т.с.с. шылаулары арқылы байланысады.

2.2 мысал. 1. Күн шығып тұр және жауын жауып тұр. 2. Алты екіге бөлінеді немесе алты үшке бөлінеді. 3. **Егер** контакті тұйық болса, **онда** шам жанады.

Байланыстыру шыларларын пікірлерге қолданатын операциялар деп қарастыруға болады. Қарапайым сөйлеуде күрделі сөйлемдегі оның бөліктерінің ақиқат не жалғандығына қарап, күрделі сөйлемнің өзін ақиқат немесе жалғандығын әрқашан анықтай алмаймыз. Пікірлер алгебрасында бұл байланыстырушыларға сәйкес операциялар енгізіледі. Соған қарай, күрделі пікірдің құрамындағы жай пікірлердің ақиқат, жалғандығына қарап күрделі пікірдің ақиқаттығын не жалғандығын **толық** анықтай аламыз.

Кез-келген A мен B екі пікір берілсін.

$A \wedge B$ (оқылуы: «A және B») өрнегі екі пікір де ақиқат болғанда ғана шығатын ақиқат пікірді білдіреді. Мұндай пікір A және B пікірлерінің **конъюнкциясы** деп аталады. $\wedge$ таңбасы **конъюнкция** операциясын береді. Бұл операция ауызекі сөйлеуде «және» шылауына сәйкес. Бірақ ауызекі сөйлеуде мән-мағынасы алыс тіркестерді «және» сөзімен қоса алмаймыз. Ал Пікірлер алгебрасында конъюнкция операциясын кез-келген екі пікірге қолдануға болады. Мысалы, «бес үштен артық» және «шөп жасыл» олардың конъюнкциясы «бес үштен артық және шөп жасыл» ақиқат пікір болады.

$A \vee B$ (оқылуы: «A немесе B») өрнегі A немесе B пікірлерінің тым болмаса біреуі ақиқат болғанда шығатын ақиқат пікірді білдіреді. Мұндай пікір A және B пікірлерінің **дизъюнкциясы** деп аталады. $\vee$ таңбасы **дизъюнкция** операциясын береді. Бұл операция ауызекі сөйлеуде «немесе» шылауына сәйкес (жалғастыратын «немесе»).

Ауызекі сөйлеуде «немесе» шылауы екі мағына береді: жалғастыратын және алып тастайтын. Бірінші жағдайда екі пікірдің тым болмаса біреуі ақиқат, не екеуі де ақиқат болуы мүмкін. Мысалы, «Ыстық күні су ішеді немесе балмұздақ жейді». Екінші жағдайда, екі пікірдің біреуі ғана ақиқат екені шығады («Бүгін біз тауға шығамыз немесе суға түсуге барамыз»). Пікірлер дизъюнкциясы бірінші жағдайға сәйкес келеді.

$A \to B$ (оқылуы: «егер A, онда B» немесе «A-дан B шығады») өрнегі A ақиқат, а B жалған болғанда ғана жалған болатын пікірді білдіреді. Мұндай пікір A және B пікірлерінің **импликациясы** деп аталады. A пікірі **шарт** немесе **жіберуші**, ал B – **қорытушы** немесе **импликация салдары** деп аталады. $\to$ таңбасы **импликация** операциясын береді. Бұл операция ауызекі сөйлеуде «егер,….онда…» байланыстырушысына сәйкес келеді. Бұл байланыстырушы екі пікірлердің мағынасын көрсетеді. Ал, $\to$ операциясының мағыналық байланысы жоқ. Мысалы, «егер 2×2 = 5, онда шөп көк» және «егер екі үштен артық болса, сегіз төртке бөлінеді» пікірлері ақиқат болады, себебі біріншісінде жіребушісі жалған, екіншісінде – салдары ақиқат. «егер 2×2 = 4, онда 5<2» импликациясы жалған, себебі оның шарты ақиқат, ал қорытындысы жалған.

$\overline{A}$ (немесе $\neg A$) (оқылуы: «A емес») өрнегі ақиқат болады, егер A жалған болса, және жалған болады, егер A ақиқат болса. Мұндай пікір A пікірінің **терістеуі** деп аталады. $\overline{}$ таңбасы (әріптің үстінде тұратын сызық) және $\neg$ әріптің алдында тұратын таңбалар терістеу операциясын береді. Ауызекі сөйлеуде **емес** жұрнағымен сәйкес келеді. Мысалы, «сегіз төртке бөлінеді» ақиқат пікіріне терістеу ретінде «сегіз төртке бөлінеді деген дұрыс емес» немесе «сегіз төртке бөлінбейді» жалған пікірлерінің бірі болады .

Бұл төрт байланыстырушылар – конъюнкция, дизъюнкция, импликация және терістеу классикалық логикалық байланыстырушылар болып табылады.

$A \sim B$ (оқылуы: «A мен B эквивалентті», «A болу үшін, B болуы қажетті және жеткілікті», «A сонда және тек қана сонда егер B», «A мен B тең мәнді») өрнегі A мен B екеуі де ақиқат немесе екеуі де жалған болғанда ақиқат болатын пікірді білдіреді. Мұндай пікір A және B пікірлерінің **эквиваленттігі** деп аталады. $\sim$ (немесе $\equiv$) таңбалары **эквиваленттік** операциясын береді. Ауызекі сөйлеуде бұл операцияға **сонда және тек қана сонда егер** байланыстырушы сәйкес келеді. Эквивалент операциясына мысал ретінде «ABC үшбұрышы тең бүйірлі болады, сонда және тек қана сонда егер B төбесіндегі бұрыш C төбесіндегі бұрышқа тең болса» пікірін алуға болады.

Егер A,B,C –кез-келген пікірлер болса, онда оларға конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленттік және терістеу операцияларын қолдану арқылы жаңа бір күрделі пікір алуға болады. Мысалы, $((A \vee B) \wedge C) \to \neg (A \to B)$.

Пікірлер алгебрасында анықталған және тұрақты 1, 0 шамаларын қабылдайтын пікірлерден өзге **анықталған пікірлер** деп аталатын пікірлер де бар. Пікірлер алгебрасында 1 немесе 0 мәндерінің бірін қабылдайтын, бірақ, нақты бір мәнге ие емес айнымалылар бар.ондай айнымалылар **пропозиционалды** деп аталады. Егер X,Y,Z – пропозиционалды айнымалылар болса, онда оларға конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленттік және терістеу операцияларын қолдану арқылы пікірлер алгебрасының формулаларын алуға болады. Пікірдің айнамалыларының мәндерін бергенде формула нақты бір мәнге ие болады. Сонымен, әрбір формула айнымалылары пікірлер айнымалысы болатын қандайда бір функцияны анықтайды. (оларды әдетте **булдік** формулалар деп атайды. Айнымалылар мен функциялар тек екі мән қабылдайды: ақиқат немесе жалған. Сондықтан функцияларды **ақиқаттық кестесі** деп аталатын кесте түрінде беруге болады.

$X \wedge Y,\ X \vee Y,\ X \rightarrow Y,\ X \sim Y,\ \overline{X}$ формулалары үшін ақиқаттық кестесін береміз.

2.1 кесте Пікірлерге қолданатын амалдар үшін ақиқаттық кестесі

X	$\overline{X}$	X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	$\overline{X}$
0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
		1	0	0	1	0	0	0
		1	1	1	1	1	1	0

Екі формула да бірдей мән қабылдауы мүмкін, бұл дағдайда формулалар теңмәнді деп аталады. Мұндайда айнымалылар саны мен құрамы сәйкес келмеуі мүмкін. Мысалы, $\overline{Y} \vee Z$ және $Y \rightarrow (Z \wedge (X \vee \overline{X}))$ формулалары теңмәнді болады. (3.2 кесте).

2.2 кесте Теңмәнді формулалар үшін ақиқаттық кестесі

X	Y	Z	$\neg Y \vee Z$	$Y \rightarrow (Z \wedge (X \vee \neg X))$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Егер ақиқаттық кестесіндегі формуланың барлық мәндері 1-ге тең болса, онда формула теңбе-тең ақиқат немесе **тавтология** деп аталады. Тавтологияны логика заңдары деп те атайды. Ауызекі сөйлеуде бұл импликаттық форманы береді: «егер осы болса,осы болса, онда ол солай да солай». Бұл жағдайда жіберуші мен қорытушының ақиқаттығы не жалғандығы қарастырылмайды, тек ұйғарымның дұрыстығы туралы ғана айтылады. Ұйғарымдар дұрыс болу керек, яғни оларға сәйкес келетін импликациялар теңбе-тең ақиқат болу керек. Осы жағынан, логика есептерін тавтологияны зерттеу деп қарастыруға болады. Формуланың тавтологиялығын ақиқаттық кестесі арқылы анықтауға болады.

2.3 Пікірлерді есептеу

Біз пікірлер алгебрасын қарастырдық. Енді оны формальды теориясын бере отырып сипаттаймыз.

2.3.1 Формальды теориялар арасында ең маңыздысы **аксиоматикалық** (немесе **дедуктивтік**) деп аталатын формальді теориялар класы. Біз осы жағдаймен шектелеміз.

Аксиоматикалық теория үшін «ақиқат» формулалардың бөлудің келесі реті орын алады:

I. Формальды теорияны құру оны құрайтын **алфавиттегі** белгілер жиынын бөлуден басталады;

II. Содан кейін **формулалар** құрастырылатын ережелер көрсетіледі (дұрыс құрылған өрнектер);

III Формуланың **теория аскиомасы** деп аталатын, қандайда бір ішкі жиыны көрсетіледі;

IV Формулалар арасындағы қатынасты анықтайтын ақырлы жиын көрсетіледі; бұл қатынастар **қорыту ережесі** деп аталады;

V **Қорыту ережесі** қандайда бір формулалардың ақырлы тізбегіне жаңа бір формулаларды сәйкестікке қояды; аксиомадағы осы ережелер көмегімен жаңа «ақиқат» формула - **теорема** алынады.

Формальді теория бұл – формальді тілдегі «ақиқаттық» теоремасы деп аталатын формуланың ішкі жиыны көрсетілген барлық формулалар жиыны. Барлық формулалар ақиқат болмайтын теория **қарама-қайшылықсыз** деп аталады.

Әдетте аксиоматикалық теорияда теоремалар келесідей анықталады.

Дәлелдеу деп әрбір $\boldsymbol{A}_i$ немесе теория аксиомасы немесе қорыту ережелерінің бірі бойынша алдыңғы формулалардың бірі арқылы алынған $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ формулаларының ақырлы санды тізбегін айтады.

Теорема деп дәлелдеуі бар соңғы формуласы $\boldsymbol{A}$ болатын, теорияның $\boldsymbol{A}$ формуласын айтамыз.

2.3.2 Аксиоматикалық теория **толық** болады (Пост мағынасында), егер оның формулалар аксиомаларына бірігуі теорема болмаса, қорыту ережесі сақталған жағдайда теорияны қарама-қайшылыққа әкеледі.

Формальді теория мен нақты бір мазмұнды теория арасындағы байланысты орнату үшін, Формальді теорияның мазмұнды теорияға **интерпретациясы** туралы сұрақты шешу керек. Формальді теорияның мазмұнды теорияға интерпретациясы бар деп айтады, егер формальді теория формуласы мен мазмұнды теорияның объектісі – сөйлемдер арасында сәйкестік болса. Интерпретация **дұрыс** деп аталады, егер формальді теорияның әр теоремасына мазмұнды теорияның ақиқат сөйлемі сәйкестікке қойылса. Интерпретация **адекватты** (кейде **толық**) деп аталады, егер ол дұрыс және мазмұнды теорияның әрбір ақиқат сөйлеміне формальді теорияның теоремасы сәйкестікке қойылса (яғни, мазмұнды теорияның сөйлемдері мен формальді теорияның теоремалары арасында өзара бірмәнді сәйкестік болса).

Енді Формальді логикалық теорияны қарастырмас бұрын келесі ескертуді айтамыз. Формальді тілді енгізу үшін біз қандай да бір тілді қолдану керекпіз (мысалы, қандайда бір таңбаларменг толықтырылған қазақ тілін). Бұл тілді объект-тілден (формальді тілден) ажырату үшін **метатіл** деп айтамыз (формальді тілден ажырату үшін).

Метатілде формальді теорияның кейбір сөйлемдерін дәлелдейді, оларды метатеорияға жатқызады.

Сондықтан «дәлелдеу» және «теорема» сөздерін қолдануда формальді тілде (объект-тілде) және метатілде айырмашылықтарын көре білу керек.

Математикада «есептеу» термині бар. Оның екі мағынасы бар. Біріншіден (кеңінен) есептеу- математиканың қандайда бір құрамдас бөлігінің атауы, мысалы, интегралдық есептеу, вариациялық есептеу. Екінші жағынан (тар мағынада) есептеу- дедуктивті жүйе, яғни, қандайда бір жиынның негізгі элементтері бойынша берілуі (есептеу аксиомалары) және берілгендерден және құрастырылғандардан жаңа элементтерді қалай алатынын сипаттайтын қорыту ережелері.

2.3.3 Пікірлер алгебрасы үшін формальді теорияны құру **пікірлерді есептеу** деп аталады.

І. Пікірлерді есептеудегі берліген таңбалар немесе алфавиттер болып: 1) пропозиционал айнымалылардың бексіз саны $X, Y, Z, X_1, X_2, X_3, \ldots$; 2) логикалық операциялардың төрт таңбасы $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$; 3) жақшалар (,).

ІІ. Пікірлерді есептеу формулаларын анықтаймыз.

1. Пропозиционалды айнымалы – формула.
2. Егер φ және ψ – формулалар болса, онда $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg \varphi$ – формулалар болады.
3. 1 және 2-де көрсетілгендерден басқа формулалар жоқ.

ІІІ. Пікірлерді есептеуді аксиомалардың шексіз санымен негіздейміз. Шексіз аксиомаларды жаза алмаймыз, сондықтан, **аксиомалар схемасын** жазамыз. Қабылдауға жеңіл болу үшін сыртқы жақшалар алынып тасталған.

1. $\boldsymbol{A} \rightarrow (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A})$.
2. $(\boldsymbol{A} \rightarrow (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C})) \rightarrow ((\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \rightarrow (\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{C}))$.
3. $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \rightarrow ((\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{C}) \rightarrow (\boldsymbol{A} \rightarrow (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C})))$.
4. $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \rightarrow \boldsymbol{A}$.
5. $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \rightarrow \boldsymbol{B}$.
6. $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{C}) \rightarrow ((\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}) \rightarrow ((\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \rightarrow \boldsymbol{C}))$.
7. $\boldsymbol{A} \rightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$.
8. $\boldsymbol{B} \rightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$.
9. $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \rightarrow (\overline{\boldsymbol{B}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{A}})$.
10. $\neg\neg \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$.
11. $\boldsymbol{A} \rightarrow \neg\neg \boldsymbol{A}$.

Әрбір аксиомалық схема $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ -ларды пікірлерді есептеудің кез-келген формуламен алмастыру арқылы шексіз көп аксиоманы береді.

IV. φ және $\varphi \rightarrow \psi$ формулаларының көмегімен тек бір қорыту ережесін енгіземіз де жаңа ψ формуласын аламыз. Бұл ереже **қима ережесі (modus ponens** немесе ***MP*)** деп аталады.

V. ***MP*** аксиомаларын және ережесін қолдану арқылы дәлелдеу құра аламыз және жаңа «ақиқаттық» формула – теорема аламыз.

Пікірлерді есептеу теоремасына мысалдар.

2.1 мысал. $X \rightarrow X$ – теорема екенін көрсетейік. Ол үшін дәлелдеу құрамыз, яғни соңғысы $X \rightarrow X$ болатын формулалар тізбегін құрамыз:

1) $(X \to (\neg\neg X \to X)) \to ((X \to \neg\neg X) \to (X \to X))$ (2 схема бойынша, мұндағы ***A*** – X-ке ауысты, ***B*** $\neg$ге ауысты $\neg X$, ***C*** – X-ке ауысты);

2) $X \to (\neg\neg X \to X)$ (1 схема бойынша);

3) $(X \to \neg\neg X) \to (X \to X)$ (2)-ден және 1) ден ***MP*** ережесі бойынша);

4) $X \to \neg\neg X$ (11 схема бойынша);

5) $X \to X$ (4) тен және 3) тен ***MP*** ережесі бойынша);

Дәлелдеудің және теореманың анықтамасы бойынша ($X \to X$) теорема.

2.2 мысал. $(X \wedge Y) \to (Y \wedge X)$ – теорема екенін көрсетейік.

Сәйкес формулалар тізбегі (***A***-ны $X \wedge Y$-ке, ***B*** – ны Y-ке, ***C*** – ны X-ке ауыстырамыз):

1) $((X \wedge Y) \to Y) \to (((X \wedge Y) \to X) \to ((X \wedge Y) \to (Y \wedge X)))$ (3 схема бойынша);

2) $(X \wedge Y) \to Y$ (5 схема бойынша);

3) $((X \wedge Y) \to X) \to ((X \wedge Y) \to (Y \wedge X))$ (1)-ден, 2)-ден ***MP*** ережесі бойынша);

4) $((X \wedge Y) \to X)$ (4 схема бойынша);

5) $(X \wedge Y) \to (Y \wedge X)$ (3), 4)-тен ***MP*** ережесі бойынша).

2.3.4 Пікірлерді есептеудегі кейбір қасиеттерді зерттейміз. Пікірлерді есептеудің әрбір формуласына пікірлер алгебрасындағы аналогиялық формулаларды сәйкестікке қою арқылы пікірлерді есептеуді пікірлер алгебрасына интерпретациялаймыз (мағыналаймыз). Мұндай интерпретация адекватты екенін көрсетуге болады. Интерпретацияның дұрыстығын ғана көрсетеміз.

2.1 теорема. *Пікірлерді есептеудегі кез-келген теорема пікірлер алгебрасындағы тавтология болады.*

Дәлелдеу. Пікірлерді есептеудегі теореманы дәлелдеуде ұзындық бойынша индукция жүргіземіз.

φ_n – теорема, ал $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – оның дәлелдеуі болсын. $n = 1$ болғанда φ_n теоремасы аксиома болады. Біртіндеп тексеру арқылы (ақиқаттық кестесін құрып) кез-келген аксиома тавтология болатынын тексереміз. Тавтологияға қолданған қорыту ережесі тавтологияға алып келетіндігінен индуктивті қадам шығады. Бұл теорема интерпретацияның дұрыстығын дәлелдейді.

Пікірлерді есептеуге қатысты оның толықтығы (Пост бойынша) мен қарама-қайшылықсыздығын көрсетуге болады.

Қарама-қайшылықсыздық–осы теорияда қарама-қайшылық алуға болмайтындығын көрсететін аксиоматикалық теорияның қасиеті, яғни кейбір сөйлемдер өзінің терістеуімен бірге дәлелдеу.

Аксиоматикалық теорияның кең кластары үшін қарама-қайшылықсыздық осы теорияда формулаланған және онда дәлелденбейтін сөйлемдер болса ғана орын алады. (2.3.1 қараңыз).

2.2 теорема. *Пікірлерді есептеу қарама-қайшылықсыз.*

Дәлелдеу. Пікірлерді есептеудегі кез-келген теорема тавтология болады. Теореманың терістеуі пікірлер алгебрасында теңбе-тең жалған сондықтан, пікірлерді есептеудегі теорема болмайды.

2.3 теорема. *Пікірлер алгебрасындағы кез-келген тавтология пікірлерді есептеудің теоремасы болады*.

2.1 салдар**.** (Пікірлерді есептеудегі адекваттық (толықтық) туралы теорема). *Пікірлерді есептеудегі дәлелденетін формулалар (теоремалар) жиыны тавтология жиынымен беттеседі*.

3 6-7 ДӘРІСТЕР. ПРЕДИКАТТАР ЖӘНЕ КВАНТОРЛАР. ПРЕДИКАТТАР ЛОГИКАСЫНДА ДӘЛЕЛДЕУЛЕРДІ ҚҰРУ. КВАНТОРЛАРМЕН АМАЛДАРДЫҢ КЕБІР ЕРЕЖЕЛЕРІ. КҮРДЕЛІ СӨЙЛЕМДЕР ЖАЗУДА ТІЛ ФОРМУЛАЛАРЫН ҚОЛДАНУ

3.1 Предикаттар мен кванторлар

Пікірлер алгебрасының дамуы предикаттар логикасы болып табылады. Бұл да логикалық жүйе немесе білімді жазудың нақты бір тілі. Предикаттар логикасында пікірлермен қатар предикаттар деп аталатын анағұрлым күрделі сөйлемдер қолданылады.

3.1.1 Бірнеше мысалдар қарастырайық:

1) «x – жай сан». x-тің орнына нақты бір сан қоймасақ, бұл пікір бола алмайды. $x = 1$ және $x = 6$ болғанда жалған пікір аламыз, $x = 3$ не $x = 7$ болғанда ақиқат болады. Сондықтан, «x – жай сан» - деген x –тен тәуелді қандайда бір $P(x)$ функциясы болады. $P(x)$-тің анықталу облысы бүтін сандар жиыны, ал $P(x)$-тің мәндер облысы-пікірлер.

2) «*x у-тен артық*». Бұл өрнекті x пен y-тан тәуелді $Q(x,y)$ функциясы деп қарастыруға болады. x пен y-тің орнына мәндер қойсақ қана пікірге айналады.

Жалпы жағдайда, ***n* айнамалыдан тұратын предикат** деп $x_1,x_2,..,x_n$ айнымалылардың орындарына $M_1,M_2,...,M_n$ жиындарынан сәйкесінше алынған нақты мәндер қойғанда пікір болатын $P(x_1,x_2,..,x_n)$ сөйлемін айтамыз. Осы жиындардың элементтері кейде **пән** деп атала ды, ал $x_1,x_2,..,x_n$-айнымалылары **пәндік айнымалылар** деп аталады. $M_1\times M_2\times...\times M_n$ (декарттық көбейту) жиыны ұзындығы n болатын реттелген жиын $P(x_1,x_2,..,x_n)$ предикатының **анықталу облысы (өрісі)** деп аталады. Егер пәндік айнымалылар саны нөлге теңболса, онда предикат пікірге айналады. $M_1,M_2,...,M_n$ жиындары айнымалылардың **сұрыптары** деп аталады.

Белгілеу енгізейік:

$x,y,z,..,x_1,x_2,x_3,...$ (латын әліппесінің соңғы әріптері кіші әріптермен жазылған, индекстері болуы мүмкін) – пәндік айнымалылар;

$a,b,c,..,a_1,a_2,a_3,...$ (латын әліппесінің алғашқы әріптері кіші әріптермен жазылған, индекстері болуы мүмкін) – $M_1,M_2,..,M_n$ жиындарының пәндері;

$A(x),B,F(x,y),P(x_1,x_2,..,x_n)$ – предикаттар. 1, 0 сандары бұрынғыдай ақиқат және жалғанды анықтайды.

Предикаттарға пікірлер алгебрасындағы операцияларды қолдануға болады (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленттік, терістеу) және жаңа предикаттар аламыз. Предикаттағы пәндік айнымалыларды олардың пәндер жиынындағы мәндерімен ауыстырсақ, біз ақиқат не жалған пікірлер аламыз, ал оларға пікірлер логикасының операцияларын қолдану арқылы жаңа бір пікір аламыз.

Мысалы, «$x = y\vee x < y$» – «$x = y$» және «$x < y$» предикаттарына дизъюнкция операциясын қолдану арқылы алынған жаңа предикат.

3.1.2 Пікірлер алгебрасындағы операциялардан бөлек предикаттар логикасында предикаттың табиғатымен байланысты негізгі екі операция бар.

M жиынында анықталған бір айнымалыдан тәуелді $P(x)$ предикаты берілсін.

$\forall xP(x)$ («кез-келген x үшін, $P(x)$ орынды») өрнегі *M* жиынының барлық элементтері үшін $P(x)$ предикаты ақиқат болған жағдайда ғана ақиқат болатын пікірді білдіреді. Мұнда $\forall$ таңбасы– **жалпылау кванторы.**

$\exists xP(x)$ («$P(x)$ орынды болатын x табылады») өрнегі $P(x)$ предикаты М-нің тым болмаса бір элементі үшін ақиқат болған жағдайда ғана ақиқат болатын пікірді білдіреді. $\exists$ таңбасы– **бар болу кванторы**.

Кванторларды қолдануға мысалдар қарастырайық. Натурал сандар өрісінде предикаттар берілсін:

1) $x^2 = xx$, онда $\forall x(x^2 = xx)$ – ақиқат пікір;

2) $x+2 = 7$, онда $\forall x(x+2 = 7)$ – жалған, ал $\exists x(x+2=7)$ ақиқат пікір;

3) $x+2 = x$, онда $\exists x(x+2 = x)$ – жалған пікір.

Предикат *n* айнымалыдан тәуелді болған жағдай. $G(x_1,x_2,..,x_n)$ – $x_1,x_2,..,x_n$ айнымалыларынан тәуелді $M = M_1\times M_2\times..\times M_n$ өрісіндегі предикат болсын. $x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n$ айнымалыларының орынына $M_1,..,M_{i-1},M_{i+1},..,M_n$ жиынынан алынған $a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n$ элементтерін қоямыз. x_i айнымалысынан ғана тәуелді $G(a_1,..,a_{i-1},x_i,a_{i+1},..,a_n)$ предикатын аламыз. Бұдан, $\forall x_iG(a_1,..,a_{i-1},x_i,a_{i+1},..,a_n)$ өрнегі пікір болады. Сондықтан $\forall x_iG(x_1,..,x_{i-1},x_i,x_{i+1},..,x_n)$ өрнегі n-1 айнымалыдан тәуелді предикат болады. Ол x_i-ден тәуелді емес. Оның мәні $(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n)$ жиыны үшін ақиқат болады, егер $G(a_1,..,a_{i-1},x_i,a_{i+1},..,a_n)$ предикаты M_i дің кез-келген пәні үшін ақиқат болса.

$\exists$ кванторы үшін де осындай талдау жүргізуге болады. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленттік, терістеу операцияларының көмегімен және де кванторларды «тіркеу» арқылы анағұрлым күрделі предикаттар алуға болады. Бұл жағдайда кванторларды «тіркеу» операциялары қолданған пәндік айнымалылар **байланысқан (связанный),** ал қалғандары еркін болады.

Мысалы, $\forall xA(\underline{x},y)\vee\exists z\forall y(B(\underline{z},\underline{y},v)\rightarrow A(\underline{z},\underline{y}))$формуласында x айнымалысының бірінші кіруі, z-тің екінші және үшінші рет те кіруі және y – байланысқан (олардың асты сызылған), ал y –тің бірінші кіруі және v – еркін.

3.2 Предикаттар логикасындағы теңбе-тең формулалар

M жүйесіндегі предикаттар логикасының формулаларын қарастыра отырып, осы жүйеде (өрісте) теңбе-тең болатын формулалар туралы айтуға болады, яғни барлық еркін пәндік айнымалыларды пәндермен және барлық предикаттар таңбасын нақта предикаттармен ауыстырғанда бірдей мән қабылдайтын формулаларды айтуға болады.

Мысалы, $\forall xW(x)$ және $\exists xW(x)$ формулалары 1) M_1 жүйесінде (өрісінде): $\{a\}$ жиынынан тұратын және $A(x)$ және $B(x)$ $A(a)$ ақиқат, $B(a)$ жалған предикаттарынан тұратын; 2) M_2 жүйесінде (өрісінде): $\{a,b\}$ жиынынан және

$A(x)$: $A(a)$ ақиқат, $A(b)$ жалған предикаттарынан тұратын болсан. Онда $\forall xW(x)$ және $\exists xW(x)$ формулалары M_1 жүйесінде (өрісінде) теңбе-тең, ал M_2-де теңбе-тең емес формулалар болады.

Предикаттар логикасының формулалары **теңбе-тең** деп аталады, егер олар кез-келген өрісте тең шамалы болса.

3. 1 теорема. *Келесі формулалар теңбе-тең*:

1. $\forall xW(x)$ және $\forall yW(y)$.
2. $\exists xW(x)$ және $\exists yW(y)$.
3. $\neg\forall xW(x)$ және $\exists x\neg W(x)$.
4. $\neg\exists xW(x)$ және $\forall x\neg W(x)$.
5. $\forall x\forall yV(x,y)$ және $\forall y\forall xV(x,y)$.
6. $\exists x\exists yV(x,y)$ және $\exists y\exists xV(x,y)$.
7. $\forall xW(x)\wedge\forall xU(x)$ және $\forall x(W(x)\wedge U(x))$.
8. $\exists xW(x)\vee\exists xU(x)$ және $\exists x(W(x)\vee U(x))$.
9. $\forall xW(x)\wedge U$ және $\forall x(W(x)\wedge U)$.
10. $\exists xW(x)\wedge U$ және $\exists x(W(x)\wedge U)$.
11. $\forall xW(x)\vee U$ және $\forall x(W(x)\vee U)$.
12. $\exists xW(x)\vee U$ және $\exists x(W(x)\vee U)$.
13. $U\rightarrow\forall xW(x)$ және $\forall x(U\rightarrow W(x))$.
14. $U\rightarrow\exists xW(x)$ және $\exists x(U\rightarrow W(x))$.
15. $\forall xW(x)\rightarrow U$ және $\exists x(W(x)\rightarrow U)$.
16. $\exists xW(x)\rightarrow U$ және $\forall x(W(x)\rightarrow U)$.

9-16 –да U формуласында x еркін емес.

Предикаттар логикасының формулаларының ішінен кез-келген өрісте (кез-келген жүйеде) ақиқат болатын формулаларды бөліп көрсетуге болады, оларды **ұдайы ақиқат формулалар** деп атаймыз. Формулалардың теңбе-теңдігі және ұдайы ақиқаттықты логикалық заң ретінде қарастыруға болады. Жалпы жағдайда, берілген формула ұдайы ақиқат бола ма немесе берілген формулалар теңбе-тең бола ма деген сұрақтарға жауап алу керек, шексіздік ұғымы қолданатындықтан өте күрделі.

3.2 теорема. *Келесі формулалар ұдайы ақиқат*:

1. $\forall xW(x)\rightarrow\exists xW(x)$.
2. $\exists x\forall yV(x,y)\rightarrow\forall y\exists xV(x,y)$.

3.1 жаттығу. Кері импликация орынды емес екенін көрсететін нақты мысал келтіріңіздер.

4 8-10 ДӘРІСТЕР. БУЛДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ НЕГІЗІ ҚАСИЕТТЕРІ. КЕМЕЛДЕНГЕН ДҚФ ЖӘНЕ ҚҚФ. БУЛЬ ФУНКЦИЯСЫ ҮШІН ЖЕГАЛКИН КӨПМҮШЕСІ. ҚОСАРЛАНҒАН ЖӘНЕ ӨЗІНЕ ӨЗІ ҚОСАРЛАНҒАН БУЛЬДІК ФУНКЦИЯЛАР. ҚОСАРЛАНУ ҚАҒИДАСЫ. МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯЛАР. ТОЛЫҚТЫЛЫҚ, ТОЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРГЕ МЫСАЛДАР. ТОЛЫҚТЫЛЫҚ КРИТЕРИІ

Әртүрлі жағдайларды сипаттауда (қандайда бір үрдістерді үлгілеуде) аргументтері тек екі мәнді (мысалы, *иә* немесе *жоқ, ақиқат* немесе *жалған,* 1 немесе 0 т.с.с.) қабылдайтын функцияларды қолдану жиірек кездеседі және осы функциялардың өзі де екі мән ғана қабылдайды. Мысалы, x аргументі «ақиқат» немесе «жалған», y – «қосылған», «өшірілген», z –«қара», «ақ», ал функцияның өзі $f(x,y,z)$ – «жұмыс істейді», «істен шықты» мәндерін қабылдайды. Нәтижесін өңдеу үшін айнымалылардың не функцияның мағынасын еске алу қажет емес, тек функция мен оның аргументтері бірдей мән, мысалы, 0 немесе 1 мәндерін қабылдайды деп есептеу керек. Алдыңғы мысалды осылайша өрнектеп көрейік. x айнымалысының орынына 1 мәнін қабылдайтын x_1 –ді қарастырамыз, x жалған болғанда мәні 0 болады; y –тің орнына 1 мәнін қабылдайтын y_1-ді аламыз, y «қосылған» мәніне ие, ал «өшірілген» y –тің мәні 0, z –тің орнына z_1; $f(x,y,z)$ –тің орнына $f_1(x,y,z)$ аламыз. Нәтижені алған соң аргументтің мағыналарын еске сала отырып, мағынасын ашу керек.

$\{0,1\}$ екі элементтен тұратын жиында анықталған және мәнді де осы жиыннан қабылдайтын функциялар **б у л ь д і к** деп аталады, яғни бұл аргументтері де функцияның өзі де тек екі мән қабылдайтын функциялар.

Анықтамадан бульдік функцияның анықталу облысы – 0 мен 1-ден тұратын, барлық мүмкін болатын n-өлшемді жиынтықтың бірігулері екені шығады, ал оның берілуін, әр жиынтыққа функцияның қандай мәндері сәйкес келетінін кестемен көрсетеміз. (кесте 3.3)

4.1 кесте. Бульдік функциялардың берілуі

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0,0,\dots,0,0)$
0	0	...	0	1	$f(0,0,\dots,0,1)$
...	...	...	...	...	....
1	1	...	1	0	$f(1,1,\dots,1,0)$
1	1	...	1	1	$f(1,1,\dots 1,1)$

Кестедегі жиынтықтардың берілу реті **лексикографиялық** (алфавиттік) түрде *деп аталады*, кейде **стандартты** немесе **табиғи** деп те айтады. Әрбір $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (мұндағы α_i 0 немесе 1 болады) жиынтығына $N = \alpha_1 2^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} 2 + \alpha_n$ санын сәйкестікке қоюға болады.

Онда (0,0,...,0,0), (0,0,...,0,1),...,(1,1,...,1,1) жиынтықтарына 0, 1,...,2^n-1 сандары сәйкес келеді. Жиынтықтардың табиғи орналасуында оларға сәйкес келетін сандар өсу ретімен орналасады. Кіру жиынтықтарына сәйкес келетін натурал сан оның номері болады. Сондықтан *k* -кіру жиынтықтарының саны *n* айнымалыдан тәуелді бульдік функциялар үшін $k=2^n$ формуласымен анықталады. *n* айнымалыдан тәуелді функциялардың санын келесіден аңғаруға болады. Айнымалылардың мәнін осы ретпен ғана жазып отырамыз. Сонда әр функция өзінің *k*-разрядты екілік санға сәйкес келетін *k* мәнімен (*k* үшін кіру жиынтықтары) беріледі. Кестеге функцияны оған сәйкес келетін мәндерінің өсу ретімен орналастырамыз, біз мүмкін болатын барлық әртүрлі функцияларды аламыз. Ондай функциялар саны $2^k = 2^{2^n}$ болады.

4.1 Негізгі немесе элементар буль функциялары

Логикалық айнымалы деп тек екі мәнді: x={0,1} қабылдай алатын x шамасын айтамыз (2.2 бөлімді қараңыз). Нақтырақ айтсақ, *x* логикалық айнымалысы қандай да бір пікірді білдіруі мүмкін. *x* айнымалысының мәні 0-ге тең, егер ол беретін пікір жалған болса, *x* айнымалысының мәні 1-ге тең егер пікір ақиқат болса. Мысалы, *x = «Волга Каспийге құяды»* пікірі ақиқат дискретті математика жағынан ол 1 мәнін қабылдайды. Ал, *«аптада 8 күн бар*» пікірі жалған болғандықтан оған сәйкес келетін айнымалы 0 мәнін қабылдайды.

Функция тәуелді болатын аргументтер саны оның **орыны** деп аталады. (бульдік болу міндетті емес). Бұл анықтаманы былай беруге болады: Функцияның құрамындағы аргументтер саны, функцияның орыны деп айтады. (мысалы, функция *n* аргументтен тәуелді болса, онда *n-орынды* функция немесе *n –дік* функция деп те айтады).

4.1.1 **Н ө л о р ы н д ы** бульдік функция деп – 0 (нөлдік функция немесе тепе – тең нөл функциясы деп те айтамыз) және 1 (бірлік функция немесе тепе – тең бір функциясы деп те айтамыз) мәнін қабылдайтын екі функцияны айтамыз, яғни $f_0(x) = 0$ және $f_1(x) = 1$.

4.2 кесте

x	$F(x)$	$\bar{x}$
0	0	1
1	1	0

4.1.2 **У н а р л ы** бульдік функция. Бір орынды бульдік функция деп – $F(x) = x$ - тепе – тең функциясын және $\bar{x} = \neg x$ - терістеу немесе инверсия (*x емес* деп айтылады) функциясын айтады.

Бір орынды бульдік функцияны **унарлы** бульдік функция деп те айтады. Унарлы бульдік функцияның, мысалы *x* және $\bar{x}$ (x-тің терістеуінің) берілуі кесте түрінде көрсетілген. Интуициялық тұрғыдан, $\bar{x}=0$, егер $x=1$, және $\bar{x}=1$ егер $x=0$.

Терістеуді кейде ~*x* (*Лукасевич терістеуі*) түрінде елгілейді. Бірақ біз осы және өзге белгілеулерді қолданбаймыз. Біз енгізген екі белгілеу де жазуға ыңғайлы түрлері.

4.1.3 Екі аргументтен тәуелді функциялар (**б и н а р л ы** немесе *екі орынды*) жиі қолданатын функциялар 4.3 кестесінде берілген. Бірақ бұлар барлық екі орынды функциялар емес (барлығы қанша болғаны?).

4.3 кесте. Бульдік функциялар

x	y	f_0	f_1	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \equiv y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \uparrow y$
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*

Кестедегі алғашқы үш баған таныс функциялар: 1) $f_0(x,y)=0$ – тепе-тең нөл *(0 константасы)*; 2) $f_1(x,y) = 1$ – тепе-тең бір *(1 константасы)*; 3) $\bar{x}$ –x-тің терістеуі, яғни аргументі жрқ немесе бір аргументтен тәуелді, олар да екі аргументтен тәуелді функция ретінде қарастырылады. Себебін кейінірек қарастырамыз. Қалған жеті функциялар екі орынды. Осы функцияларға жеке-жеке тоқталайық.

$x \wedge y$ – **конъюнкция**. «$\wedge$» таңбасының орнына кейде «&», «*», «·» таңбалары немесе кейде бос қалдырып кетеді: $x \wedge y = x \& y = x \cdot y = xy$, бұл таңбалардың әрқайсысы белгілі бір жағдайлар үшін қолайлы. Бұл функцияны *логическалық көбейту* деп жиі айтады. Конъюнкция – қарапайым (нөл мен бірді) көбейтуге ұқсас екенін көреміз. Логика тұрғысынан– бұл «*және*» шылауы. Ос ыоперацияның тағы бір мағынасы- аргументтерінің мәндерінің *минимумы*;

$x \vee y$ – **дизъюнкция** (*жалғаулы НЕМЕСЕ*). Дизъюнкцияны кейде $x + y$ деп те белгілейді. Логикалық қосу амалы деп айтады. Бірақ бұл атаулар (логикалық қосу) және «+» белгісі қолдануға ыңғайсыз және көне жазба. Сондықтан біз оларды қолданбаймыз. Аргументтерінің мәндерінің *минимумы* ретінде қарастырсақ, тиімдірек болады.

$x \to y$ – **импликация**. Кейде оны $x \supset y$ деп те белгілейді. Бұл логикада өте маңызды функция. Мұны формальды логикалық салдар деп қарастыру керек және оқылуы *« х-тан ушығады»*;

$x \equiv y$ – **эквиваленттік**. «≡» таңбасының орнына «~» таңбасы жиі қолданылады. Бұл функцияның логикалық мағынасы: x пен y бірдей мән қабылдайды;

$x \oplus y$ – **2 модулі бойынша қосу** (*ажыратылған НЕМЕСЕ, альтернация*, «*немесе х, немесе у*» тіркесі). Бұл функция дизъюнкцияға қарағанда қосуға жақын келеді. Барлық бүтін сандар жұп, тақ бөлып бөлінеді. Жұп сандарды 0, тақ сандарды 1 деп алсақ, екі жұп санның қосындысы-жұп (кестенің бірінші жолы), тақ пен жұп санның қосындысы тақ сан болады (кестенің екінші және үшінші жолдары), екі тақ санның қосындысы жұп сан болады (кестенің соңғы 4-жолы). Кейін бұл операз. цияны жай қосу *«+»* белгісімен де белгілей

$x \mid y$ –**Шеффер сызығы (штрихы)** (егер $x = y = 1$, онда $x \mid y = 0$, қалған жағдайларда $x \mid y = 1$); логикалық мағынасы – конъюнкцияның терістеуі.

$x \uparrow y$ –**Пирс бағыты (стрелкасы)** (егер $x = y = 0$, онда $x \uparrow y = 1$, қалған жағдайларда $x \uparrow y = 0$); логикалық мағынасы – дизъюнкцияның терістеуі. Кейде оны $\downarrow$ деп те белгілейді.

Шеффер сызығын, Пирс бағытын кейбір басқа функциялармен бірге **Вебб** функциялары деп те айтады.

Соңғы үш функцияның логикалық мағынасы жоғары емес, олар тек басқа функциялардың терістеулері. Бірақ бұл функциялардың техникалық мүмкіндіктері зор.

4.2 Элементар буль функцияларының негізгі қасиеттері мен олардың арасындағы қатыстар

Егер айнымалылар кез-келген сөйлемдер болады деп, ал теңдік осы сөйлемдердің тепе-теңдігі болады деп есептесек, онда бұл теңдіктерді логикалық заңдар деп те қарастыруға болады (2.2 және 2.3 бөлімдерді қараңыз).

1. Операциялардың ассоциативтігі $\vee$, $\wedge$, $\equiv$, $\oplus$:

$((x \circ y) \circ z) = (x \circ (y \circ z))$, мұндағы $\circ$ – $\vee, \wedge, \equiv, \oplus$ операцияларының бірі.

2. $\vee$, $\wedge$, $\equiv$, $\oplus$, $\uparrow$, $|$ операцияларының коммутативтігі:

$x \circ y = y \circ x$, мұндағы $\circ$ - $\vee$, $\wedge$, $\equiv$, $\oplus$, $\uparrow$, $|$ операцияларының бірі.

3. Дистрибутивтік:

а) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy \vee xz$

б) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

в) $x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z) = xy + xz$

4. Константалардың қасиеттері:

а) $x \oplus 1 = \bar{x}$; б) $x \wedge 1 = x$; в) $x \wedge 0 = 0$;

г) $x \vee 1 = 1$; д) $x \vee 0 = x$

5. «үшіншісін алу» заңы: а) $x \vee \bar{x} = 1$;

Оған қосарланған: б) $x \wedge \bar{x} = 0$; в) $x \oplus x = 0$.

6) Идемпотенттік:

а) $x \wedge x = x$;

б) $x \vee x = x$;

7) Екі рет терістеу заңы: $\bar{\bar{x}} = x$.

8) Де Морган заңы: а) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; б) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

9) Импликацияның негізгі қасиеті: $x \to y = \bar{x} \vee y$.

10) $\bar{x} = x|x = x \uparrow x = 1 \oplus x$.

Бұл формулалардың дұрыстығын ақиқаттық кестесінің көмегімен тексеруге болады. $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ операцияларының ассоциативтігі және коммутативтігі жақшаларды алып тастауға мүмкіндік береді және келесі белгілеулерді қолдануға болады:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \ldots x_n; \quad \bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n; \quad \bigoplus_{i=1}^{n} x_i = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

4.3 Функцияның вектор түрде берілуі. Елеулі және елеусіз айнымалылар

4.3.1 x_i айнымалысы $f(x_1,\dots,x_i,\dots .x_n)$ функциясы үшін **елеулі** деп аталады, егер басқа айнымалыларының $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n$ ($\alpha_j \in \{0,1\}$ мәндерінде $f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n) \neq f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$ орындалса. Елеулі емес айнымалыны фиктивті немесе **елеусіз** айнымалы деп айтамыз.

4.1 мысал. 4.4 кестесімен берілген функцияның елеусіз айнымалысын табайық.

ке

4.4 кесте

x	*y*	*z*	*f*
	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x – елеулі бола ма?

$F(0,0,0) = 1 \neq f(0,0,0) = 0 \Rightarrow x$ – елеулі айнымалы.

y – елеулі бола ма?

$$\left.\begin{array}{l} F(0,0,0) = l = f(0,l,0) = l; \\ f(0,0,l) = 0 = f(0,l,l) = 0; \\ F(l,0,0) = 0 = f(l,l,0) = 0; \\ f(l,0,1) = 0 = f(l,l,1) = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow y \text{ – елеусіз.}$$

z – елеулі бола ма?

$F(0,0,0) = 1 \neq f(0,0,1) = 0 \Rightarrow z$ – елеулі айнымалы.

4.5 кесте

x	*z*	*F*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

y – елеусіз айнымалы болғандықтан, кестенің $y = 0$ болғандағы мәндері мен $y = 1$ жолындағы функцияның мәндері қайталанады, яғни немесе $y = 0$ немесе $y = l$ болғандағы жолдарды алып тастаймыз. Нәтижесінде екі айнымалыдан ғана тәуелді функция аламыз.

4.3.2 осы тараудың басында айнымалылардың лексикографиялық реті туралы айтылды. Келешекте үнемі осы лексикографиялық түрде жазып отырамыз. Онда барлық кестені толтырмай-ақ соңғы бағандағы мәнді ғана көрсеткен ыңғайлы. Осы бағандағы жоғарыдан төмен қарай орналасқан сандарды солдан оңға қарай орналастырып, жолмен жазсақ, функцияның **вектор-мәні** деп айтамыз. 4.1 мысалдағы функция үшін вектор-мән: $f = (1,0,1,0,0,0,0,0)$, ал 4.5 кестедегі функция үшін $f = (1,0,0,0)$ болады.

4.4 Қосарланған функция

$\overline{f(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)} = \neg f(\neg x_1,\dots,\neg x_n)$ функциясы f функциясына *қосарланған функция* деп аталады және f^* деп белгіленеді.

4.2 мысал. $(x \,\&\, y)^* = (x \cdot y)^* = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = x \vee y$.

1 сөйлем. *f –ке қосарланған функцияның қосарланған функциясы f-тің өзіне тең.*

Дәлелдеу. $[f^*(x_1,...,x_n)]^* = [\overline{f(\overline{x_1},...,\overline{x_n})}]^* = \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x_1}},...,\overline{\overline{x_n}}) = f(x_1,...,x_n)$.

Егер функция кесте (айнымалылардың мәні лексикографиялық түрде берілген) түрінде берілсе, қосарланған функциясының мәнін қалай табатынымызды қарастырайық. $(x_1,...,x_n)$ жиынтығын $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ жиынтығымен ауыстыру кестеді «тері айналдырғанмен» бірдей. Шынында да, $(x_1,...,x_n)$ жиынтығы мен $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ жиынтығы кестенің ортасына қатысты симметриялы орналасқан. Мысалы, (0,0,1) және (1,1,0) біреуі жоғарыдан екінші, енді біреуі-төменнен екіншісі. Енді функцияның нәтижесін терістеу қалды, яғни 0-ді 1-ге және 1-ді 0-ге ауыстыру керек. Сонымен, берілген функцияға қосарланған функцияны алу кестені «айналдырумен» және 0-ді 1-ге, 1-ді 0-ге ауыстырумен алынатынын көрдік.

4.3 мысал. Қосарланған функцияны кесте бойынша, вектор мән арқылы анықтау.

4.6 кесте

x	y	z	f	f^*
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

4.6 кестеде қосарланған функцияны қалай табу керектігі көрсетілген. $x \wedge y$ және $x \vee y$, функцияларының вектор мәндері *(0,0,0,1)* және *(0,1,1,1)* екендігінен бір-біріне қосарланған екенін көру қиын емес. Сол сияқты $x \oplus y$ және $x \equiv y$ функцияларының мәндерінен *(0,1,1,0)* және *(1,0,0,1)* олардың бір-біріне қосарланған екенін көреміз. x және $\overline{x}$ функцияларының әрқайсысы (*(0,1)* және *(1,0)* векторлары) өз-өзіне қосарланған болады.

4.1 теорема (Қосарлану қағидасы). *Функциялардың суперпозициясына қосарланған функция, қосарланған функциялардың суперпозициясына тең:* $[f_0(f_1,...,f_m)]^* = f_0^*(f_1^*,...,f_m^*)$.

Дәлелдеу. $[f_0(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))]^* = \neg f_0(f_1(\neg x_1,..., \neg x_n),...,f_m(\neg x_1,..., \neg x_n)) = \neg f_0(\neg\neg f_1(\neg x_1,..., \neg x_n),..., \neg\neg f_m(\neg x_1,..., \neg x_n)) = \neg f_0(\neg f_1^*(x_1,...,x_n),..., \neg f_m^*(x_1,...,x_n)) = f_0^*(f_1^*(x_1,...,x_n),...,f_m^*(x_1,...,x_n))$.

4.1 салдар (Қосарлану қағидасының екінші тұжырымдамасы). *Формула арқылы берілген функцияның қосарланған функциясын табу үшін осы формуладағы барлық функцияларды қосарланған функцияларына ауыстыру керек.*

4.4 мысал. $f = (x \oplus z) \rightarrow ((\neg y \vee z) \wedge x)$ берілсін. Бұл формулаға импликация кіреді ал, оның қосарланған функциясы элементар функция емес. Сондықтан, бірінші импликациядан құтылып алуымыз керек. 4.2 бөлімнен 9-қасиетті қолданып: $f = \neg(x \oplus z) \vee ((\neg y \vee z) \wedge x)$, енді 4.1 салдар бойынша және 4.4 мысалдың нәтижесін қолдана отырып, $f^* = \neg(x \equiv z) \wedge ((\neg y \wedge z) \vee x)$ екенін аламыз.

4.5 Кемелденген дизъюнктивті және кемелденген конъюнктивті қалыпты формалар (КДҚФ және КҚҚФ).

f бульдік функциясы үшін (енді тек функция деп айта береміз) **дизъюнктивті қалыпты форма** (д.қ.ф.) деп элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясын айтамыз, ал **элементар конъюнкция** деп айнымалылардың немесе олардың терістеулерінің конъюнкциясын айтамыз.

4.5 мысал. Бульдік функцияларды қарастырайық: $A = x\bar{y} \vee z$, $B = \bar{x} \vee y \vee z$, $C = x\bar{y}\,\bar{z}$, $D = \bar{x}\,\&(y \vee z) = \bar{x}(y \vee z) = \bar{x} \wedge (y \vee z)$, $E = \bar{x}\,\bar{y}(x \vee z)$. A, B, C функциялары д.қ.ф., себебі A екі элементар конъюнкцияның дизъюнкциясы: $x\bar{y}$ және z; B – әрқайсысы бір **әріптен (литер**, яғни айнымалы немесе оның терістеуі) тұратын үш элементар конъюнкцияның дизъюнкциясы; C – бір элементар конъюнкцияның дизъюнкциясы.

Осыған қосарланған жағдаймен конъюнктивті қалыпты форма (к.қ.ф.) анықталады: f функциясы конъюнктивті қалыпты формада (к.қ.ф.) берілген деп айтады, егер ол **элементар дизъюнкциялардың** конъюнкциясы түрінде берілсе, яғни айнымалылардың немесе олардың терістеулерінің дизъюнкциясы түрінде. Мысалы, B, C және D функциялары к.қ.ф. болады, ал E – к.қ.ф.-да, д.қ.ф.-да бола алмайды.

Литердің қайталануы туралы сөз болған жоқ, сондықтан да $A_1 = x \vee \bar{x} \vee y$, $B_1 = xyy$- әрі д.қ.ф.әрі к.қ.ф. Егер д.қ.ф.-да (к.қ.ф.-да) оның әрбір элементар конъюнкциясында (дизъюнкциясында) барлық айнымалылар бір реттен кездесіп отырса, онда мұндай д.қ.ф.-ны (к.қ.ф.-ны) **кемелденген КДҚФ (КҚҚФ)** деп айтамыз. Жоғарыда келтірілген мысалдардың ішінде B функциясы ғана КҚҚФ түрінде тұр, ал C – КДҚФ түрінде тұр (егер осы функциялардың барлығы үш айнымалыдан тәуелді деп есептесек).

4.2 теорема. *1)Теңбе-тең 0-ден өзге кез–келген бульдік функцияны КДҚФ түрінде жазуға болады; 2) Теңбе-тең 1-ден өзге кез–келген бульдік функцияны КҚҚФ түрінде жазуға.*

4.2 салдар. *Кез–келген бульдік функцияны к.қ.ф.-да, д.қ.ф.-да жазуға болады.*

4.6 Жегалкин көпмүшесі

Жегалкин көпмүшелігі (немесе полиномы) бұл – көп айнымалыдан тәуелді қарапайым көпмүше, тек айырмашылығы – көбейтудің орнына конъюнкция, қосудың орнына екі модулі бойынша қосу, ал коэффициент пен тұрақты ретінде нөль және бір қолданылады.

n айнымалыдан тұратын жегалкин көпмүшелігінің max дәрежесі неге тең? Жауабы: n. n *-нен* жоғары дәреже алу мүмкін емес, себебі: $x^2 = x{\cdot}x = x \wedge x = x$, $x^3 = x$ т.с.с.

4.3 теорема. *Кез–келген бульдік функцияны Жегалкин көпмүшесі түрінде тек бір ғана түрде жазуға болады.*

Дәлелдеу (құру тәсілі де осы). Бұл тәсіл $x + 1 = \bar{x}$ қасиетіне негізделген. Егер функция ДҚФ түрінде берілсе, онда ең әуелі де Морган заңын қолданып, дизъюнкцияларды алып тастаймыз, пайда болған терістеулерден 1-ді қосу арқылы құтыламыз. Содан кейін дағдылы жағдаймен, жақшаларды ашамыз, ескеретініміз, бірдей қосылғыштардың жұп рет қосылуы нөлге тең (себебі, $x + x = 0$), ал бірдей қосылғыштардың тақ рет қосылуы осы қосылғышты бір рет жазғанға тең. Алынған өрнек берілген функцияның *Жегалкин көпмүшесі* болады.

4.7 Функциялардың суперпозициясы. Функциялар жиынтығының тұйықталуы. Функциялардың тұйық кластары. Толық жиынтық.

4.7.1 Ақырлы санды бульдік функциялардан тұратын қандайда бір D жиынтығы бар болсын. Осы жиынтықтың функцияларының суперпозициясы деп төмендегі екі операцияны ақырлы рет қолдану арқылы алынған жаңа функцияларды айтамыз:

- D-дағы функцияның құрамына енетін айнымалылардың атын өзгертуге болады;

- кез-келген айнымалының орнына D –дағы функцияны немесе оның дайын суперпозициясын қоюға болады.

4.6 мысал. Егер $x|y$ (Шеффер сызығы) берілсе, оның суперпозициясы болып келесі функциялар табылады: ол функцияның өзі, $x|x$, $x|(x|y)$, $x|(y|z)$ т.с.с.

K класының **тұйықталуы** деп K-дан кез-келген ақырғы ретті функциялардың жиынтығынан алынған барлық суперпозициялар жиынын айтамыз. K функциялар клас **тұйық** деп аталады, егер тұйықталуы өзімен беттессе.

Функциялар жиынтығы (жүйесі) **толық** деп аталады, егер оның тұйықталуы барлық бульдік функциялармен беттессе. Басқаша айтсақ, барлық бульдік функциялар белгілі бір жиынтықтағы функциялар арқылы өрнектелсе, онда бұл жиынтық **толық жиынтық** болады.

4.7 мысал. 4.2 және 4.3 теоремалардан $D_1 = \{\neg,\wedge,\vee\}$; $D_2 = \{\wedge,\oplus,0,1\}$ жиынтықтары толық болады, ал $\{\neg\}$ және $\{\wedge,\vee\}$ жүйелері толық емес (неге?)

4.4 теорема. *Егер* $D = \{f_1,\dots,f_k\}$ *жиынтығы –толық, ал* $F = \{g_1,\dots,g_l\}$ *жүйесі үшін:* D*-дағы әрбір* f_j *функциясы* F *жүйесіндегі функциялардың суперпозициясы түрінде жазылса, онда* F *жиынтығы да толық болады.*

Дәлелдеу. h – кездейсоқ алынған бульдік функция болсын. D жүйесі толық болғандықтан, h функциясы D жүйесіне енетін функциялар көмегімен формула түрінде жазылады. Шарт бойынша осы формуладағы әр f_j

функциясын F жүйесіндегі функциялар суперпозициясымен ауыстыруға болады, нәтижесінде тек g_i функциялары ғана болатын формула аламыз.

4.7.2 Бульдік функциялардың бес маңызды кластары:

1) T_0 – (0 константасын **сақтайтын** класс) – айнымалылардың нөлдік жиынтығында 0-ді қабылдайтын функциялар класы. Мысалы, 0 константасы, дизъюнкция, конъюнкция, ал импликация бұл класқа жатпайды;

2) T_1 – (1 константасын **сақтайтын** класс) – айнымалылардың бірлік жиынтығында 1-ді қабылдайтын функциялар класы. Мысалы, 1 константасы, дизъюнкция, конъюнкция, ал 2 модулі бойынша қосу бұл класқа жатпайды;

3) L –**сызықты** функциялар класы, яғни Жегалкин көпмүшесінде дәрежесі 1-ден жоғары емес функциялар. Мысалы, 0, 1 константалары, 2 модулі бойынша қосу, ал дизъюнкция, конъюнкция бұл класқа жатпайды;

4) S –**өзіне-өзі қосарланған** функциялар класы, яғни өзіне қосарланған функциямен беттесетін функциялар: $f^* = f$. Мысалы, терістеу мен теңбе-тең $f(x) = x$ функциялары өзіне-өзі қосарланған, ал 0 мен 1 константалары 2 модулі бойынша қосу, дизъюнкция, конъюнкция – жатпайды.

5) M –**монотонды** функциялар класы. Осы класты толығырақ сипаттайық. Ұзындығы n -ге тең 0 мен 1-ден тұратын екі жиынтық берілсін: $s_1 = (x_1,x_2,\ldots, x_n)$ және $s_2 = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$. s_1 жиынтығы s_2 жиынтығынан **жалпылай артық емес** (тоталды артық емес) деп айтамыз және $s_1 \sqsubseteq s_2$ деп белгілейміз, егер бірінші жиынтықтың барлық элементтері екінші жиынтықтың сәйкес элементтерінен артық емес болса: $x_i \le y_i$. Ұзындығы n болатын жиынтықтар осы ретке қатысты салыстырыла бермейді, мысалы, $n=2$ болғанда $(0,1)$ және $(1,0)$ жиынтықтары бір-бірімен салыстырылмайды.

Лемма 4.1 *«тоталды артық емес» (немесе «жалпылай артық емес») қатынасы – дербес рет, яғни, ол рефлексивті, антисимметриялы және транзитивті.*

4.7 кесте

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1					

4.8 мысал. Кестеде f_1, f_2 монотонды функциялар, ал f_3, f_4 – монотонды емес функциялар, f_1, f_2 - өзіне-өзі қосарланған.

Айнымалылардың лексикографиялық (табиғи) ретпен жазылуында тотальді кіші жиынтық «үлкеннен» жоғары орналасады. Кері дұрыс емес! Сондықтан, айнымалылары лексикографиялық (табиғи) ретпен жазылған ақиқаттық кестесінде жоғарыда нөлдер, содан кейін бірлер тұратын болса, ол функция міндетті түрде монотонды болады. Бірақ, қандайда бір нөлдерге дейін 1 кезігетін функция да монотонды болуы мүмкін жағдайлар бар (мұндай жағдайда «жоғарыда» тұрған бірдің жиынтығы мен «төменде» тұрған нөлдің жиынтығы салыстырылмайтын жиынтықтар болу керек). Мысалы, $(0,0,0,1,0,1,0,1)$ вектор түрде берілген функция монотонды болады.

4.5 теорема. *T_0, T_1, L, M, S функциялардың кластары тұйық.*

Бұл тұжырым тұйықтықтың анықтамасы мен осы кластардың анықтамасынан шығады.

Бульдік функциялар теориясында толықтық туралы келесі теореманың маңызы зор.

4.6 теорема (толықтылық туралы). *К қандайда бір функциялардың жиынтығы толық болу үшін осы жиынтық толығымен* T_0, T_1, L, M, S *кластарының ешқайсысына жатпау керектігі қажетті және жеткілікті*.

Егер *К* жиынтығынан алынған барлық функциялар аталған кластардың біріне жатса, онда барлық суперпозициялар да, яғни тұйықталуы да осы класқа тиісті болар еді. Бұдан шығатыны, T_0, T_1, L, M, S кластарының ешқайсысы барлық бульдік функциялардың класымен беттеспейтіндіктен, *К* класы да толық бола алмас еді. Бұл теореманың қажеттігін көрсетеді.

Бұл тұжырымның жеткіліктігі өте күрделі, сондықтан біз мұнда оны қарастырмаймыз .

5 11-13 ДӘРІСТЕР. БУЛЬДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫ МИНИМИЗАЦИЯЛАУ МӘСЕЛЕЛЕРІ, ҚАРАПАЙЫМДЫЛЫҚ ИНДЕКСІ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖАҒЫ. КЕМЕЛДЕГЕН, ТУПИКТІК, МИНИМАЛДЫ, ҚЫСҚАРТЫЛҒАН ДҚФ

5.1 Минимизация мәселесі

5.1.1 f бульдік функциясы үшін (енді тек функция деп айта береміз) **дизъюнктивті қалыпты форма** (д.қ.ф.) деп элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясын айтамыз, ал **элементар конъюнкция** деп айнымалылардың немесе олардың терістеулерінің конъюнкциясын айтамыз. Осыған қосарланған жағдаймен конъюнктивті қалыпты форма (к.қ.ф.) анықталады: f функциясы конъюнктивті қалыпты формада (к.қ.ф.) берілген деп айтады, егер ол **элементар дизъюнкциялардың** конъюнкциясы түрінде берілсе, яғни айнымалылардың немесе олардың терістеулерінің дизъюнкциясы түрінде (4.5 бөлімді қараңыз).

4.5 бөлімде қарастырғанымыздай, егер д.қ.ф.-да (к.қ.ф.-да) оның әрбір элементар конъюнкциясында (дизъюнкциясында) барлық айнымалылар бір реттен кездесіп отырса, онда мұндай д.қ.ф.-ны (к.қ.ф.-ны) **кемелденген КДҚФ (ККҚФ)** деп айттық. КДҚФ кең ауқымды. Бір функция д.қ.ф. түрінде неғұрлым қысқа тәсілмен жазылуы мүмкін. Мысалы, $H =_g \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z = (\bar{y} \vee y)\ \bar{x}z \vee x\bar{y}z = 1\cdot\bar{x}z \vee x\bar{y}z = \bar{x}z \vee x\bar{y}z =_g G$. Немесе одан да қысқаша: $H = \bar{x}z \vee \bar{y}z =_g F$. Мұнда $A\ =\ _gB$ жазбасы **графикалық теңдікті** білдіреді, яғни, әріптері бірдей болған соң тең дегенді білдіреді. F, G және H д.қ.ф.-лары функция ретінде (ақиқаттық кестесі арқылы тексеріп көрсек, бір функцияның мәнін береді) тең, ал д.қ.ф. ретінде олар әртүрлі.

«Ұзынырақ», «қысқарақ» терминдерін әртүрлі жағдайда анықтауға болады [13]. Олардың ішіндегі ең қарапайымын қарастырайық: д.қ.ф.-дағы немесе к.қ.ф.-дағы кездесетін литерлер (әріптер, яғни, айнымалылар немесе олардың терістеулері) саны **әріптік қарапайымдылық индексі** деп аталады және $L_B(A)$ деп белгіленеді. Жоғарыда көрсетілген д.қ.ф.-да ол: $L_B(H)=9$, $L_B(G)=5$, $L_B(F)=4$.

5.1.2 **Бульдік функцияларды минимизациялау мәселелері** деп әдетте осы функцияны құрайтын қандайда бір қарапайымдылық индексінің минималды (неғұрлым аз) мәнді д.қ.ф. табуды айтады. Ондай д.қ.ф.-ны осы индекс бойынша минималды деп айтады. Келесі көрсетілген әдістер ең әуелі L_B индексіне қатысты қарастырылған. Бірақ олардың кейбірі кез-келген қарапайымдылық индексі үшін жарамды.

Бірден айта кететін жағдай, минималдық қасиетті (L_B болса да) «ары қарай ықшамдау» қасиетінен ажырата білу керек. Мысалы, . $A = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xy \vee y\bar{z}$ және $B = \bar{x}\,\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$ д.қ.ф.-лары бір функцияны береді. Мұнда A д.қ.ф.-да ешбір әріпті де, ешбір конъюнкцияны да жоюға болмайды, функцияның мәні өзгеріп кетеді. Сонымен, A д.қ.ф.-да (B д.қ.ф.-да да солай) бір-де бір элементін алып тастайтындай етіп ықшамдауға болмайды, мұндай д.қ.ф. **тупиктік** д.қ.ф. деп аталады. Осы жағдайда $L_B(A)=8$, а $L_B(B)=6$.

Барлық аналитикалық және геометриялық әдістер тек тупиктік д.қ.ф. табуға арналған және оларды минималдыдан ажыратпайды. Сондықтан, берілген функция үшін мүмкін болса, барлық тупиктік формаларды табуға тырысу керек. Барлық минималды д.қ.ф. (L_B бойынша) солардың ішінде болады.

5.1.3 Қандайда бір f функциясы үшін барлық тупиктік д.қ.ф.-ларды таптық деп есептейік: $A_1 = K_{1,1}\vee K_{1,2}\vee\ldots\vee K_{1,r}$; $A_2 = K_{2,1}\vee K_{2,2}\vee\ldots\vee K_{2,s},\ldots, A_m = K_{m,1}\vee K_{m,2}\vee\ldots\vee K_{m,t}$, мұндағы $K_{i,j}$ – элементар конъюнкциялар. Онда бір жағынан, барлық i үшін $f = A_i$, ал екінші жағынан, $f = A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_m$, бұл бульдік функциялар үшін орынды болатын $A\vee A = A$, яғни $f = (K_{1,1}\vee K_{1,2}\vee\ldots \vee K_{1,r}) \vee (K_{2,1}\vee K_{2,2}\vee\ldots \vee K_{2,s})\vee \ldots\vee (K_{m,1}\vee K_{m,2}\vee\ldots\vee K_{m,t})$ теңдігінен шығады. Егер соңғы теңдікте жақшаларды ашып, қайталауларды алып тастасақ, тағы $K\vee K=K$ қолдансақ, онда элементар конъюнкцияларды қайта нөмірлеу арқылы $f = K_1\vee K_2\vee\ldots\vee K_p =_g C$ түрдегі өрнегін аламыз. Бұл өрнектегі K_i-лер өзгеше; ешқандай K_i элементар конъюнкциялардың құрамынан ешбір литерлерді алып тастай алмаймыз; және барлық тупиктік д.қ.ф. C-дан қандайда бір элементар конъюнкцияларды жою арқылы алынады. Мұндай қасиетке ие д.қ.ф. **қысқартылған** д.қ.ф. (**ҚДҚФ**) деп, ал оларды құрайтын конъюкциялар – **жай импликанталар** деп аталады. Соңғы термин келесі теоремамен түсіндіріледі.

5.1 теорема. *К элементар конъюнкциясы f функциясы үшін жай импликанта болады, сонда және тек қана сонда егер ($K\to f$) = 1, ал К-дан қандайда бір литерді жою арқылы алынаған К' кез-келген элементар конъюнкциясы бұл қасиетке ие емес. ҚДҚФ барлық жай импликанталардың дизъюнкциясы.*

5.2 Квайн әдісі

5.2.1 Квайн әдісі ҚДҚФ-ны кемелденген формадан табуға негізделген. Ол екі леммаға негізделген.

5.1 лемма. $xK\vee \bar{x}K = xK\vee \bar{x}K\vee K$.

5.2 лемма. $xK\vee K = K$.

Теңдіктің сол жағынан оңға өтуді леммалар үшін сәйкесінше, **желімдеу** және **жұтылу** деп айтамыз. Алгоритмнің тақ қадамдарында x пен $\bar{x}$ литерлерінің барлық мүмкін мәндеріне желімдеу жүргіземіз, бұдан д.қ.ф. көбейеді. Жұп қадамдарда барлық мүмкін болатын жұтылуларды жүргіземіз. 1-лемма қолданылмай қалғанда алгоритм жұмысын аяқтайды.

5.1 мысал. Осы алгоритмді $f = (1,1,0,1,0,1,0,1)$ функциясына қолданамыз. Функцияның айнымалылары лексикографиялық түрде берілетіні бұрын да айтылған. Бірінші, (0,0,0), екінші (0,0,1),…, соңында (1,1,1). ҚДҚФ құрамыз да кестеден f -тің мәні 1-ге тең болатын жолдарды таңдап аламыз. Осындай (α,β,γ) әрбір жолға элементар конъюнкция жазамыз, яғни $\alpha = 1$ болғанда x деп қана жазамыз, $\alpha = 0$ болғанда $\bar{x}$ жазамыз. Онда кестенің бірінші жолы (0,0,0)

$L_1 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ элементар конъюнкциясын береді, екінші жолы (0,0,1) – $L_2 = \bar{x}\,\bar{y}\,z$, чтөртінші жолы (0,1,1) – $L_3 = \bar{x}yz$, алтыншы жолы (1,0,1) – $L_4 = x\bar{y}z$, сегізіншісі (1,1,1)–$L_5=xyz$. Соңында алатынымыз, $f= \bar{x}\bar{y}\underline{\bar{z}} \vee \underline{\underline{\bar{x}}}\,\bar{y}^{(1)}\underline{z} \vee \underleftrightarrow{\bar{x}}\,y^{(1)}z \vee \underline{\underline{x}}\,\bar{y}^{(2)}z \vee \underleftrightarrow{x}\,y^{(2)}z$.

Мұнда асты сызылған немесе жоғарғы индекспен белгіленген литерлер жұбына 1-лемма қолданылады. Бірінші жұп – L_1 –дің құрамындағы $\bar{z}$ және L_2–нің құрамындағы z (бір сызықпен сызылған) белгілеген себебіміз олар жойылған соң L_1 де де L_2-де де $\bar{x}\,\bar{y}$ деген бірдей конъюнкциясы қалады. Осылайша, L_2 -нің құрамындағы $\bar{y}$ пен L_3 –тің құрамындағы у (жоғарыдағы 1 индекспен белгіленген) жойылса, L_2 мен L_3-те бірдей $\bar{x}z$ конъюнкция қалады, т.с.с. қалған жұптар үшін де осылай жалғаса береді.

5.1 кесте

№	x	y	z	f
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

1 қадам. $f = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee L_5 \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z \vee yz \vee xz$, мұндағы бірінші қосылған $\bar{x}\,\bar{y}$ элементар конъюнкция z айнымалысы бойынша L_1 мен L_2-ні желімдеуден шықты, екінші қосылған $\bar{y}z$ элементар конъюнкция x айнымалысы бойынша L_2 мен L_4-ті желімдеуден шықты, үшінші $\bar{x}z$, L_2 мен L_3-тен алдық, төртінші yz – ті L_3 пен L_5-тен алдық, бесінші xz –ті L_4 пен L_5-тен алдық

2 қадам. $\bar{x}\,\bar{y}$ қысқа конъюнкциясы өзінен ұзынырақ және құрамында өзі бар L_1 мен L_2 конъюнкцияларды жұтады, $\bar{y}z$ L_2 мен L_4-ті жұтады, $\bar{x}z$ L_2 мен L_3-ті жұтады, yz – L_3 пен L_5 і жұтады. Қалғаны: $f = \bar{x}\bar{y} \vee \underrightarrow{\bar{y}}z \vee \underline{\underline{\bar{x}}}z \vee \underrightarrow{y}z \vee \underline{\underline{x}}z$.

3 қадам. Тағы да бірдей «қалдықтары» бар екі жұп литер сызылған. Олар жаңа элементар конъюнкцияларды береді:

z және z, яғни $f=\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z \vee yz \vee xz \vee z \vee z$.

4 қадам. Қысқа z неғұрлым ұзындарын жұтады: $\bar{y}z$, $\bar{x}z$, yz, xz. Қайталауды алып тастаймыз, $z \vee z$. Қалғаны: $f = \bar{x}\,\bar{y} \vee z$.

1-лемма енді қолданылмайды. Жауабы: $\bar{x}\,\bar{y} \vee z$ – ҚДҚФ.

5.3 Блейк әдісі

Бұл әдіс арқылы кез-келген д.қ.ф-дан ҚДҚФ-ны табады. Ол екі леммаға негізделген.

5.3 лемма. $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$

5. 4. лемма $K_1K_2 \vee K_2 = K_2$.

Теңдіктің сол жағынан оңға өтуді леммалар үшін сәйкесінше, **жалпыланған желімдеу** және **жалпыланған жұтылу** деп айтамыз.

Алгоритмнің тақ қадамдарында x пен $\bar{x}$ литерлерінің барлық мүмкін мәндеріне жалпыланған желімдеу жүргіземіз, бұдан д.қ.ф. үлкейеді. Жұп қадамдарда барлық мүмкін болатын жалпыланған жұтылуларды жүргіземіз. Қайталанатындар мен «бостарды» яғни, $\bar{x}xK$ элементар конъюнкцияларын алып тастаймыз. 1-лемма қолданылмай қалғанда немесе циклді қайталаудан соң алдыңғы д.қ.ф. қайта шығатын болса, алгоритм жұмысын аяқтайды.

5.2 мысал. $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} = \bar{x}\underline{\bar{y}} \vee \bar{y}^{(1)}\underline{\underline{z}} \vee \underline{y}^{(1)}\underline{\underline{\bar{z}}}$ функциясына осы алгоритмді қолданайық.

1. алдыңғы алгоритмнен айырмашылығы бір литер бірнеше рет жұптасуы мүмкін. Біздің жағдайда ол - $L_3 = y\bar{z}$-тегі y. Ол бірінші рет $L_1 = \bar{x}\,\bar{y}$-дегі $\bar{y}$-мен бірге $\bar{z}\,\bar{x}$ желімдеуін береді (мұнда 3-леммадан K_1 ретінде L_3 –тен $\bar{z}$, K_2 ретінде L_1-ден $\bar{x}$ тұр). Екінші рет ол $L_2=\bar{y}z$-ден $\bar{y}$-пен бірігеді де $z\bar{z}$ желімдеуін береді. из L_2 –дегі z пен L_3-тегі $\bar{z}$ - $y\bar{y}$ желімдеуін береді.

Нәтижесінде алатынымыз: $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{z}z \vee \bar{y}y$.

2 қадам. Мұнда қысқа элементар конъюнкциялар жоқ (оларды іздеуде xx=x екенін ұмытпау керек), сондықтан жұтылу болмайды. Қайталаулар да жоқ, $z\bar{z}=y\bar{y}=0$ сондықтан, оларды алып тастаға болады. Нәтижесінде алатынымыз: $g=\bar{x}\underline{\bar{y}} \vee \bar{y}^{(1)}\underline{\underline{z}}^{(2)} \vee \underline{y}^{(1)}\underline{\underline{\bar{z}}} \vee \bar{x}\bar{z}^{(2)}$.

3 қадам. Алғашқы үш жұп (L_1 ден $\bar{y}$ және L_3-ден y, L_2 –тен $\bar{y}$ және L_3-тен y, L_2 –ден z, және L_3-тен $\bar{z}$) бізге таныс $\bar{x}\,\bar{z} = L_4$, $z\bar{z}$ және $y\bar{y}$-ті береді. Төртінші жұп (L_2 -ден z және L_4 –тен $\bar{z}$) $\bar{x}\bar{y}$-ті береді. Сонымен, $g=\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee z\bar{z} \vee y\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$.

4 қадам. Қайталанатындар мен «бостарды» алып тастап, $g=\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$ – деген 2-ші қадамнан кейін шыққан д.қ.ф.-ны алдық. Сондықтан алгоритм жұмысын аяқтайды.

Ескерту. Соңғы мысал «ҚДҚФ» атауы алдамшы екенін көрсетеді: біз қысқа түрдегі д.қ.ф.-дан алған ҚДҚФ өте «ұзын» болып шықты. Ұғымның шығуы оның құрамындағы элементар конъюнкциялардың барлығы қысқарғанмен түсіндіріледі.

5.4 Нельсон әдісі

Бұл әдіс кез-келген к.қ.ф.-дан ҚДҚФ табады. Конъюнкцияның дизъюнкцияға қатысты дистрибутивтік қасиетіне негізделген: $x\wedge(y\vee z)=xy\vee xz$. Алгоритмнің бірінші қадамында к.қ.ф.-ның жақшаларын ашамыз: әрбір жақшалардағы элементар дизъюнкцияларды көбейтіп шығамыз. Екінші қадамда барлық ықшамдаулар, (4-лемма) жұтылулар жүргізіледі, қайталаулар мен «бостар» алынып тасталады. Осымен алгоритм жұмысын аяқтайды.

Алгоритмді $h=(\bar{x}\vee y)(y\vee z)(x\vee\bar{z})$ функциясына қолданайық. Жақшаларды қос-қостан ашқан ыңғайлы: $h = (\bar{x}y \vee yy \vee \bar{x}z \vee yz)(x \vee \bar{z}) = (y \vee \bar{x}z)(x \vee \bar{z}) = yx \vee \bar{x}zx \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{z} = yx \vee y\bar{z}$.

5.5 Шектік нүктелер әдісі

Бұл әдіс арқылы кез-келген жай импликанттардың дизъюнкциясынан қандайда бір тупиктік д.қ.ф.-ларын табуға болады, ал егер берілген д.қ.ф.-қысқартылған болса, онда анықтап қарасақ, барлық тупиктік д.қ.ф.-ларын табуға болады. Ол келесі деректерге негізделген.

5.5 лемма. *Әртүрлі r литерлерден тұратын (**рангісі** r) элементар конъюнкция 2^{n-r} нүктені береді, мұндағы n – барлық айнымалылардың саны.*

Мысалы, $x_1\overline{x}_3 = x_1^1 x_3^0$ конъюнкциясы x_1 мен x_3 екі айнымалысы ғана болса, (<u>1</u>,<u>0</u>) деген бір нүктені анықтайды, ал айнымалылары x_1, x_2 және x_3 үшеу болса, онда екі нүктені анықтайды: (<u>1</u>,0,<u>0</u>) и (<u>1</u>,1,<u>0</u>), x_1, x_2, x_3 және x_4 –төрт айнымалылы болса, $2^{4-2} = 4$ нүктені анықтайды: (<u>1</u>,0,<u>0</u>,0), (<u>1</u>,0,<u>0</u>,1), (<u>1</u>,1,<u>0</u>,0) және (<u>1</u>,1,<u>0</u>,1). т.с.с. Мұнда нүктенің асты сызылған координаталары $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ конъюнкцияларын береді, қалған n–r координаталар 0 немесе 1 болуы мүмкін.

Ескерту. Геометриялық идеяны айқын ашатындықтан, осы әдістің кейбір терминдері мен сөз қолданыстары оқылғанда қызық естілуі мүмкін, 5.6 бөлімде бұл кездейсоқтық емес екенін көресіздер.

$A =_g K_1 \vee \ldots \vee K_t$ – жай импликанттардың дизъюнкциясы болсын және K_i элементар конъюнкцияның рангсі r болсын. $K_i =_g x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}$ ал $x_{r+1}, \ldots x_n$ айнымалылары оның құрамына енбейді. Барлық нөлдер мен бірлердің мүмкін болатын $\beta_{r+1},\ldots,\beta_n$ жиынтығы үшін $K_i(\beta_{r+1},\ldots,\beta_n) =_g K_i \cdot x_{r+1}^{\beta_{r+1}} \ldots x_n^{\beta_n}$ элементар конъюнкциясын қарастырамыз.

5.6 лемма. *K_i (β_{r+1}, β_{r+2}, ..., β_n) конъюнкцияларының барлығы басқа K_j мұнда ($i \neq j$) импликанталарымен жұтылып кететін болса ғана, яғни нөл мен бірдің кез-келген (β_{r+1}, β_{r+2}, ..., β_n) жиынтығы үшін K_i (β_{r+1}, β_{r+2}, ..., β_n) конъюнкциясының құрамында болатын K_j мұнда ($i \neq j$) конъюнкциясы табылатын болса, және тек сол жағдайда ғана K_i жай импликантасы жойылуы мүмкін.*

Сипаттаудан көргеніміздей, рангсі r конъюнкцияны түзетілімге тексеру үшін 2^{n-r} кестесін құру жеткілікті. Тәжірибеде ықшамырақ болады.

$A =_g x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_2x_4$ д. қ. ф.қарастырайық, $K_1 = x_1x_2$, $K_2 = x_1x_3$, $K_3 = x_2\overline{x}_3$, $K_4 = x_2x_4$ болсын. K_1-ді тексеру үшін 4 жолдан тұратын кесте құрамыз, әуелі 2 жолдан тұратын құрамыз, яғни жетіспейтін айнымалыларды бір-бірлеп қосып отырамыз. Сөйтіп біз K_1-дің жойылатынын көреміз. K_4 –ті сынауда да тек бір айнымалыны (бір «қабырғаны») қосумен шектелеміз: K_4 –ті түзетілмейтін (**ядро** болатынын) деп айту, $\overline{x}_1x_2x_4$ «қабырғасы» оның «нүктелерін» құрайтын қалған жақтарының ешқайсысында толығымен жатпаса да бөлек жұтылуы мүмкін. Кестенің қажетті бөлігін тағы кеңейтеміз:

5.2 кесте

β_3	$K_1(\beta_3)= x_1x_2 x_3^{\beta_3}$	Чем поглощается
0	$x_1x_2\bar{x}_3$	K_3
1	$x_1x_2x_3$	K_2

5.3 кесте

β_1	$K_4(\beta_1)= x_1^{\beta_1} x_2x_4$	Чем поглощается
0	$\bar{x}_1x_2x_4$	–
1	$x_1x_2x_4$	K_1

Енді $\bar{x}_1x_3x_2x_4$ конъюнкциясына сәйкес келетін нүкте ешбір «жағына» тиісті емес болғандықтан, K_4 импликантасы -ядролық екені көрініп тұр. K_2 мен K_3-ті де осылай зерттеуге болады. Бірақ бұл жағдайда мұны жасамай-ақ қоюға болады, себебі K_1-ді тексерудегі кестеден K_1-ді жою керек болса, онда K_2 –ні де K_3-ті де қалдыру керек, ал K_4-ті мүлдем жоюға болмайды, яғни $K_2 \vee K_3 \vee K_4 = x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_4$ – осы жағдайда жалғыз ғана тупиктік д.қ.ф. осы болады әрі минималды формасы да осы.

5.4 кесте

β_1	β_3	$K_4(\beta_1,\beta_3)=x_1^0 x_3^{\beta_3} x_2x_4$	Чем поглощается
0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_2x_4$	K_3
0	1	$\bar{x}_1x_3x_2x_4$	–

5.6 Барлық тупиктік д.қ.ф. табу әдісі

ҚДҚФ берілсін, онда шектік нүктелер және Нельсон әдісіне сүйене отырып, барлық тупиктік формаларын табуға болады.

Осы әдісті мысалмен келтірейік, жалпы жағдайда, $A =_g \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee xy \vee xz \vee \bar{y}z$ –қандайда бір функцияның ҚДҚФ болуы мүмкін. $K_1 = \bar{x}\bar{y}$ элементар конъюнкциясы $P_1=(0,0,0)$ және $P_2=(0,0,1)$ нүктелерін береді, $K_2 = \bar{x}\bar{z}$ конъюнкциясы да екі нүктені: $P_1=(0,0,0)$ және $P_3=(0,1,0)$ береді, $K_3 = y\bar{z}$ — $P_3=(0,1,0)$ және $P_4=(1,1,0)$ нүктелерін береді, $K_4 = xy$ —$P_4=(1,1,0)$ және $P_5=(1,1,1)$ нүктелерін береді, $K_5 = xz$ — $P_5=(1,1,1)$ және $P_6=(1,0,1)$) нүктелерін береді, $K_6 = \bar{y}z$ — $P_6=(1,0,1)$ және$P_2=(0,0,1)$) нүктелерін береді. N_f жиыны функцияның бір мәнін қабылдайтын нүктелер жиыны, олар: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6- алты нүктеден тұрады. Енді 5.5 кестеде көрсетілгендей, алты жұмыс бағанасын (N_f

жиынындағы нүктелер саны бойынша) және алты жұмыс жолын (жай импликанталар санына байланысты) саламыз. Бұл кестенің i–жолы мен j-бағанасына 1 жазамыз, егер P_j -K_i-ді өрнектесе және кері жағдайда 0 жазамыз. Оны P_j нүктелерін табу барысынды жол бойынша толтырған ыңғайлы.

5.5 кесте

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
K_1	1	1	0	0	0	0
K_2	1	0	1	0	0	0
K_3	0	0	1	1	0	0
K_4	0	0	0	1	1	0
K_5	0	0	0	0	1	1
K_6	0	1	0	0	0	1

P_1 нүктесі K_1 немесе K_2-ні беруі мүмкін, мұны таңбамен ($1\vee2$) деп белгілейік, P_3 нүктесі K_2 немесе K_3 -ні беруі мүмкін, мұны таңбамен ($2\vee3$) деп белгілейік, P_4 нүктесі K_3 немесе K_4 -ні беруі мүмкін, мұны таңбамен ($3\vee4$) деп белгілейік, P_5 нүктесі K_4 немесе K_5 -ні беруі мүмкін, мұны таңбамен ($4\vee5$) деп белгілейік, P_6 нүктесі K_5 немесе K_6 -ні беруі мүмкін, мұны таңбамен ($5\vee6$) деп белгілейік. Онда $L= (1\vee2)\wedge (1\vee6) \wedge (2\vee3) \wedge (3\vee4) \wedge (4\vee5) \wedge (5\vee6)$ жазбасы барлық 6 нүктелер нақты бір K_i импликанталарының тіркесін береді, яғни L-дің құрамындағы сандарды логикалық сөйлемдер деп басқаша айтсақ, бульдік айнымалылар деп білу керек. Жақшаларды ашу ережесімен барлығын көбейтеміз, және бұл сандар бульдік айнымалылар екенін ескереміз, яғни $2\cdot6=12$ емес, ол $2\cdot6$ деп қалады, ал $k\cdot k = k$ болады. қос-қостан жақшаларды «көбейтеміз», 1-ді 2-мен, 3-ті 4-пен , 5-ті 6-мен: $L = (1\cdot1\vee2\cdot1\vee1\cdot6\vee2\cdot6)(2\cdot3\vee 3\cdot3\vee 2\cdot4\vee 3\cdot4)(4\cdot5\vee 5\cdot5\vee 4\cdot6\vee 5\cdot6)$. Ары қарай көбейтпей тұрып, $k\cdot k = k$ екенін және қысқа конъюнкция ұзынын жұтатынын ескеріп ықшамдап алайық, мысалы, 1-ші жақшадағы 1 өзінен үлкен болатын: $2\cdot1$ және $1\cdot6$ –ді жұтады: $L=(1\vee2\cdot6)(3\vee2\cdot4)(5\vee4\cdot6)=(1\cdot3\vee2\cdot6\cdot3\vee1\cdot2\cdot4\vee2\cdot6\cdot2\cdot4)(5\vee4\cdot6)=1\cdot3\cdot5\vee2\cdot3\cdot5\cdot6\vee1\cdot2\cdot4\cdot5\vee 2\cdot4\cdot6\cdot5\vee 1\cdot3\cdot4\cdot6\vee 2\cdot3\cdot4\cdot6\vee 1\cdot2\cdot4\cdot6\vee 2\cdot4\cdot6 = 1\cdot3\cdot5\vee2\cdot3\cdot5\cdot6\vee1\cdot2\cdot4\cdot5\vee1\cdot3\cdot4\cdot6\vee2\cdot4\cdot6$.

L өрнегінің мағынасын ескеріп, барлық 6 нүктеде немесе K_3 және K_5-пен K_1 –ді беретінін, немесе K_3 , K_5 және K_6 –мен бірге K_2–ні беретінін, және т.с.с. бұдан алатынымыз: $K_1 \vee K_3\vee K_5$, $K_2 \vee K_3\vee K_5 \vee K_6$, $K_1 \vee K_2\vee K_4\vee K_5$, $K_1 \vee K_3\vee K_4\vee K_6$ және $K_2 \vee K_4\vee K_6$- берілген функцияның барлық тупиктік д.қ.ф. болады. Олардың ішінде екеуі ғана (біріншісі мен соңғысы) – L_B бойынша минималды болады.

5.7 Геометриялық әдіс

$n \le 4$ болғанда қысқартылған және бірнеше тупиктік д.қ.ф табуға көмектеседі.

$f = (1,1,0,1,0,1,0,1)$ функциясын қарастырайық. Оның кестелік мәнінен функцияның 1-ге тең болатын N_f нүктелер жиынын табу оңай: олар $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,0,1)$, $P_3 = (0,1,1)$, $P_4 = (1,0,1)$, $P_5 = (1,1,1)$. Осы нүктелерді төбесі координаталар басынан басталатын бірлік кубтың төбелері ретінде белгілейміз. (5.1 сурет). Суреттен көріп отырғанымыздай, P_2, P_3, P_4 және P_5 нүктелері кубтың $z = 1$ теңдеуімен берілетін жоғарғы бетін толық жабады. Расында да бұл нүктелердің үшінші координаталары 1-ге тең. Бұл жақ 2 өлшемге ие болады және N_f жиынында осы нүктелерді құрайтын бұдан басқа үлкен жақ жоқ. Сондықтан, $z^1 = z$ элементар конъюнкциясы f функциясы үшін жай импликанта болады. P_1=(0,0,0) нүктесі осы жақпен жабылмай қалды,

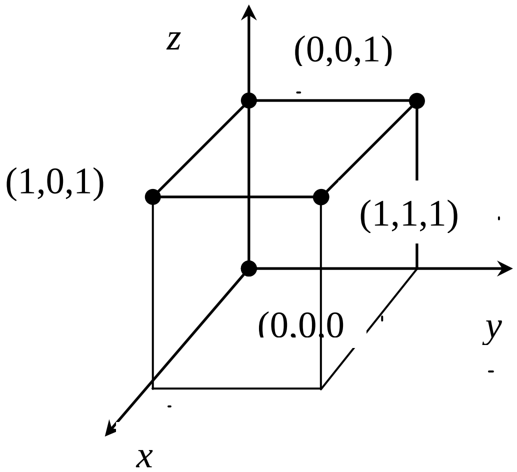


Рис.5.1

бұл жалғыз нүкте (0 өлшемді жақ) x = 0, y = 0, z = 0 теңдеулерінің жүйесін, яғни $x^0y^0z^0 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ элементар конъюнкциясын береді. Оны жай импликанта деп есептеуге болмайды, себебі P_1 нүктесі кубтың 0z өсіндегі қырында және N_f жиынында толық жатады. Бұл қабырға (1 өлшемді жақ) P_1 және P_2 нүктелерінен тұрады, олардың 2 ортақ координаталары бар, x = 0 және y = 0, сондықтан P_1 P_2 қабырғасы бір уақытта N_f-де болатын кубтың ешқай жағына жатпайды. Сондықтан, $x^0y^0 = \bar{x}\bar{y}$ конъюнкциясы –f үшін жай импликанта. Егер біз тек бір-ғана тупиктік д. қ. ф. іздесек, онда бұл: $z \vee \bar{x}\bar{y}$ болады, себебі, оның конъюнкцияларына сәйкес келетін жақтар N_f –тің барлық жиынын жабады және олардың бір де бірін алып тастай алмаймыз.

ҚДҚФ табуда N_f жиынының ішінен басқа да максималды жақтарды іздеуді жалғастыру керекпіз. Бұл жағдайда ондайлар жоқ, сондықтан $z \vee \bar{x}\bar{y}$ қысқартылған формасы болады.

n = 4 болғанда төрт өлшемді куб сала алмаймыз. **Карно картасын (Вейч диаграммасын)** құрамыз. Бұл берілген функцияның мәнін беретін кесте, бірақ әдіске ыңғайлы етіп орналасқан. Мысалы, *f=(1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,0,0)* функциясын қарапайым 5.6 кестесінде көрсетілген.

5.6 кесте

X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0

Оны 4х4 квадратына (5.7 кесте) орналастыруға болады. Квадраттың алғашқы екі жолдарында бірінші координаталары 0 болатын функцияның мәндерін орналастырамыз, нүктенің координаталарын жазбаймыз. 3-ші және 4-ші жолдарға координаталары (1,…) болатын нүктелердіорналастырамыз. Торкөздерге координаталарды емес, тек функцияның мәндерін жазамыз. Жақшадан жаңылмас үшін (біздің жағдайда сол жақта) 3-ші және 4-ші жолдардың қарсысына x_1 деп белгілеп қоямыз. Ортаңғы(2-ші және 3-ші) бағандарға функцияның екінші координаталары 1 болатын мәндерін енгіземіз, оларды жоғарыдан x_2 деп белгілеп қоямыз, ал 1-ші және 4-ші бағандар екінші координаталары 0 болатын нүктелерге арналған. 2-ші және 3-ші жолдарға x_1 – дің екінші жағына x_3 деп белгілеп қоямыз. 3-ші және 4-ші бағандарды x_4 деп белгілейміз. Координаталары 0 болатын жолдар мен бағандарды белгілеулер көп болып кететіндіктен. суретте көрсетпейміз.

5.7 кесте

		x_2			
	1_4	1_4	1	1	
	1	1	1	0_1	x_3
x_1	1	0_4	0_5	$\underline{1}$	
	1_4	$\underline{1}_4$	0_3	0_2	
			x_4		

Біздің мысалда функция он бір жағдайда 1 мәнін, бес жағдайда 0 мәнін қабылдайды. Сондықтан, карно картасын толтыруда нөлдерден бастаймыз. Олардың біріншісі кестенің (0,0,1,1) координаталы 4-ші жолында орналасқан. Бұл торкөр былай ізделінеді, бірінші 0 алғашқы екі жолдың бірін таңдауды білдіреді, екінші 0 осы сегіз тордың ішінен төрт бүйір жағындағы тоаларды таңдау керектігін білдіреді. Үшінші кординатасы -1, осы төрт тордың 2-ші және 3-ші жолда тұрғандарын таңдауымызды білдіреді. Ондай торлар екеу. Бірінші және төртінші бағанда; енді соңғы 1 координатасы осы екі тордың ішінен 4-ші бағандағысын таңдауды талап етеді (бұл координатаға сәйкес тор 0_1 деп белгіленіп тұр). (1,0,0,1) координаталы екінші нөл кестеде 0_2 орналасқан торға сәйкес. (1,1,0,1) координаталыүшінші нөл 0_3 орналасқан торға сәйкес. (1,1,1,0) координаталы төртінші нөл 0_4 орналасқан торға сәйкес, соңғы, бесінші нөл -0_5 орналасқан торға сәйкес келеді. Карно картасының қалған торларын бірлермен толтырамыз.

Карта толтырылған соң, қандайда бір тупиктік д. қ. ф. табуға кірісеміз. Бірінші жол толығымен бірлермен толтырылғанын байқаймыз. Осы жолдың барлық нүктелерінің бірінші және үшінші координаталары нөл, себебі бірінші жолды сол жақтан x_1 деп белгілеген жоқпыз, ал оң жақтан - x_3 деп белгілеген жоқпыз, яғни бұл нүктелер $\bar{x}_1\bar{x}_3$ конъюнкциясын береді. Мұнда бірінші жолды көрші жолдармен (екінші және төртінші!) біріктіре алмаймыз, себебі оларда нөлдер бар. Сондықтан бірінші жолдың нүктелері N_f жиынында максималды жақты береді, бұдан $\bar{x}_1\bar{x}_3$-жай импликанта болады. осылайша, картаның бірінші бағаны да $\bar{x}_2\bar{x}_4$- жай импликанта екенін көреміз. Екінші, үшінші бағандардағы алғашқы екі жолдардың төрт торкөзі $\bar{x}_1x_2$-үшінші жай импликанталарын береді. Асты сызылған, орналасқан екі торкөздегі бірлер жабылмай қалды. Олардың төртінші жолда орналасқаны бұрыштағы көршісімен $x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$ конъюнкциясын береді, бірақ оның басқа да көршілері бар. Бірінші жолдағы 1-ші және 2-бағанда орналасқан бірлер, төртінші жолдағы алғашқы бірлермен бірігіп (картада 1 индексімен белгіленген бірлер), $\bar{x}_3\bar{x}_4$- жай импликантасын береді. Соңғы жабылмаған нүкте $x_1\bar{x}_2x_3x_4$ «координатасын» береді. Бірақ оны осы жолдың бірінші бағанындағы көршісімен бірігіп, $x_1\bar{x}_2x_3$ импликантасын береді. Барлық бірлер орналасқан торкөздер осы конъюнкциялармен жабылады. Осы импликанталардың ешқайсысын жоюға болмайды, себебі, олардың әрқайсысы тым болмаса бір нүктені жауып тұр. Сонымен, $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3$ –тупиктік д.қ.ф. болады. Бірақ бұл қысқартылған форма емес, себебі картаның сол жақ жоғарыдағы төрт торкөзі де N_f жиынындағы максималды жақты, яғни $\bar{x}_1\bar{x}_4$ конъюнкциясын береді. Басқа жай импликант табылмайды, сондықтан $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4$ –ҚДҚФ болады.

6 14-15 ДӘРІСТЕР. ГРАФТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ АНЫҚТАМАЛАРЫ МЕН НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ, МЫСАЛДАР. ОРГРАФТАР, МУЛЬТИГРАФТАР. ІШКІ ГРАФТАР. ӨЛШЕНЕТІН ГРАФ. ҚЫСҚА ЖОЛДАР. ЭЕМ-ДА ГРАФТАРДЫҢ БЕРІЛУІ (МАТРИЦАЛЫҚ ЖӘНЕ БАСҚА ТҮРЛЕРІ) ҚЫСҚА ЖОЛДАР. ИЗОМОРФТЫ ГРАФТАР. АҒАШТАР. АНЫҚТАМАЛАР. ОСТТАРДЫҢ ӘРТҮРЛІ АНЫҚТАМАЛАРЫНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІГІ

6.1 Негізгі анықтамалар

6.1.1. Табиғаттың кез-келген объектісінен алынған *төбелер* деп аталатын V – жиыны (оларды жазықтықта нүктелер түрінде көрсетуге болады) және *қабырға* деп аталатын, $e_i=(v_{i1},\ v_{i2})$, $v_{ij}\in V$, төбелер жұбының жиыны (оларды доғалармен, немесе екі төбе арасындағы бағыттармен көрсетеді) - E болатын екі жиыннан тұратын $G = (V,E)$ жұбы *граф* деп аталады. V –төбелер жиыны, E – қабырғалар жиыны деп аталады. Егер e_i қабырғасын беретін төбелер ретінің мәні болса, онда граф *бағдарланған* (ориентирациялы) граф қысқаша – орграф деп деп аталады. Бұл жағдайда графтың доғасына (қабырғасына) бағыт көрсетеді және бір төбесін басы екіншісін –соңы деп айтады. Қарсы жағдайда граф *бағдарланбаған* (ориентирациясыз, бағдарсыз) деп аталады. Алдағы жағдайларда бағдарланғандығы көрсетілмеген, нақтыланбаған «граф» сөзін бағдарланбаған граф деп есептейміз.

Қарапайым графтың ілгегі және еселі қабырғасы болмайды. Қарапайым графты жай граф деп те айтады. Оларды еселі қабырғалары бар графтардан ажырату үшін еселі қабырғасы бар графтарды *мультиграф* деп айтады. Ары қарай тек ақырлы графтарды ғана қарастырамыз.

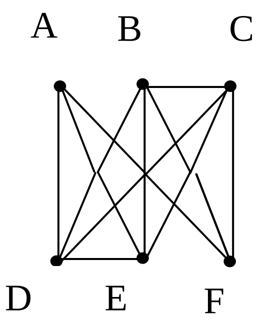
5.1.2. $G = (V,E)$ –графы *толық* болады, егер кез-келген екі төбесі бір қабырғамен түйіскен (бір ғана қабырғамен байланысқан) болса, яғни, кез-келген төбелер жұбы сыбайлас (қандайда бір қабырғамен байланысқан) болатын бағдарсыз граф. K_p деп белгіленеді, мұндағы $p = |V|$ - төбелер саны, мұнда қабырғалар саны $|E| = p(p\text{-}1)/2$ –ге тең болады. Қабырғасы жоқ $G = (V,E)$ – графы *бос* деп аталады, $E = \varnothing$ [белгіленуі - N_m].

Байланысты граф деп кез-келген төбелер жұбынан бір-біріне өтуге болса, яғни кез-келген төбеден екінші төбеге өтетін жол (маршрут) болса. Граф байланысты болады, сонда және тек қана сонда, егер оның төбелер жиынын әр қабырғасының екі шеткі нүктелері бір жиында қалатындай екі бос емес жиындарға бөлуге болса.

6.1 теорема. Байланысты графтардың қасиеттері.

а) байланысты граф бір қабырғасын жойғаннан кейін де байланысты болып қала береді, егер бұл қабырға циклде болса.

б) К төбесі бар байланысты графтың К-1-ден аз емес қабырғасы болады.



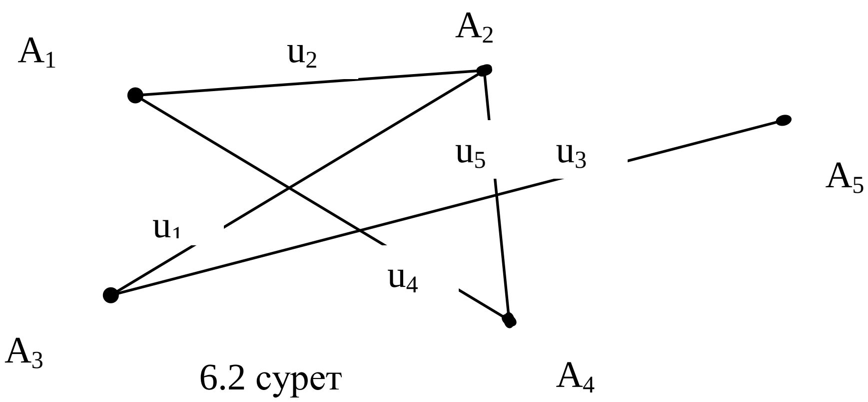
6.1 сурет

в) байланысты графта кез-келген максималды ұзындықты қарапайым екі тізбесінің тым болмаса бір ортақ төбесі болады.

г) N төбесі бар және K байламдық компоненттері бар графтың қабырғалар саны 1/2(N-K)(N-K+1)-ден артпайды.

Байланысты графтың екі төбесінің ара қашықтағы деп осы төбелерді қосатын ең қысқа тізбенің (жолдың, маршруттың) ұзындығын айтамыз, яғни қысқа жолдағы қабырғалар саны. Мысалы, 6.1 суретте көрсетілген G_1 графының A төбесінен D, E және F т өбелеріне дейінгі қашықтық 1-ге тең ал, B және C төбелеріне дейінгі қашықтық 2-ге тең: r(A,D) = r(A,E) = r(A,F) = 1, r(A,B) = r(A,C) = 2.

Графтың төбесінің *эксцентриситеті* деп берілген төбеден басқа төбелерге дейінгі қашықтықтардың ең үлкенін айтамыз. G_1 графы үшін A төбесінің эксцентриситеті 2-ге тең: e(A) = 2, басқа төбелердің де эксцентриситетін табу қиын емес: e(B) = e(C) = e(D) = e(E) = e(F) = 2. Графтың *радиусы* ретінде төбелерінің эксцентриситеттерінің ең кішісін алады, ал *диаметрі* – максималды эксцентриситет. G_1 графында радиус пен диаметр беттеседі: $R(G_1) = D(G_1) = 2$.

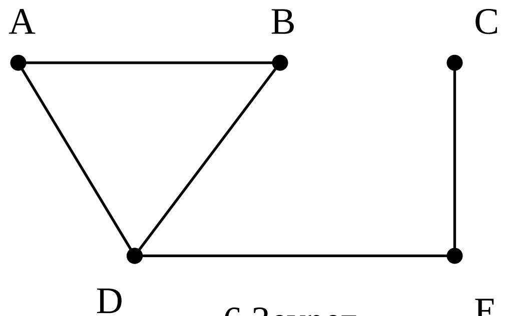


6.2 сурет

5.1.3. Графтың *төбесінің дәрежесі* деп осы төбеге тиісті болатын (түйіскен) қабырғалар санын айтамыз. Графтың төбелерінің дәрежелерінің өсу ретімен немесе кемі ретімен берілген тізімі *вектор-дәрежесі* деп аталады. Мысалы, G_1 графында ол (3,3,4,4,4,4) –ге тең, 6.2 –суретте көрсетілген G_2 графында ол (1,2,2,2,3). Дәлелдеуі өте қарапайым.

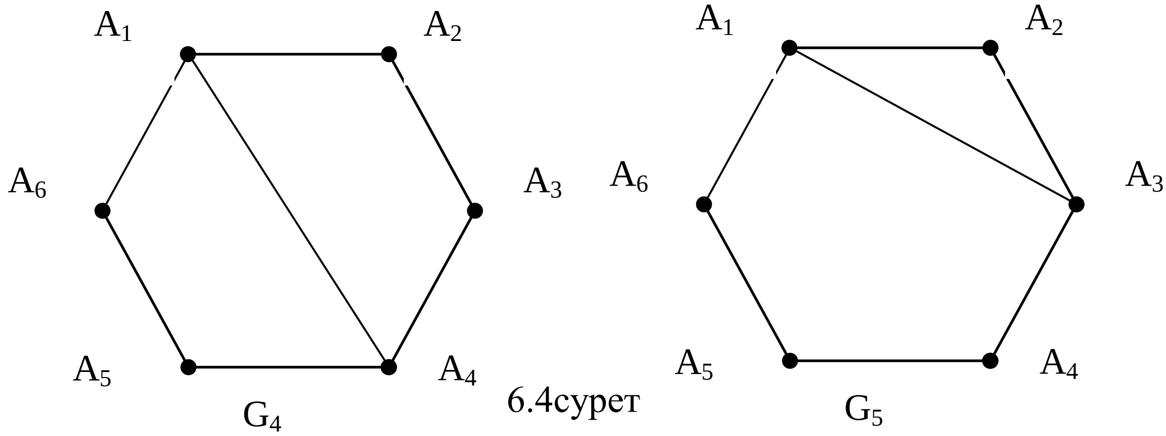
6.2 теорема. *Графтың барлық төбелерінің дәрежелерінің қосындысы қабырғаларының екі еселенген санына тең.*

G_2 графын 6.2 суреттен басқа етіп, мысалы 6.3 суреттегідей салуға болады. Бұған көз жеткізу үшін G_2 графтың A_1 төбесіне- 6.3 суреттегі графтың A төбесін сәйкес қоюға болады, A_2 төбесіне–D төбесін A_3 төбесіне – E төбесін, A_4 төбесіне –B төбесін, A_5 төбесіне –C төбесін сәйкес қоюға болады. Нәтижесінде, екі графтың төбелерінде өзара бірмәнді сәйкестік орнады. .



6.3сурет

Мұндай жағдайда бұл суреттердегі графтарды өзара *изоморфты* деп те айтады. Изоморфты графтардың вектор-дәрежесі бірдей. Кері тұжырым дұрыс емес. Мысалы, 6.4 суреттегі G_4 пен G_5 изоморфты емес, себебі G_4 графында ұзындығы 3-ке тең цикл жоқ, ал G_5 графында ол бар, $A_1A_2A_3$-ке тең. Бірақ, бұл графтарда вектор–дәрежелері тең: (2,2,2,2,3,3).



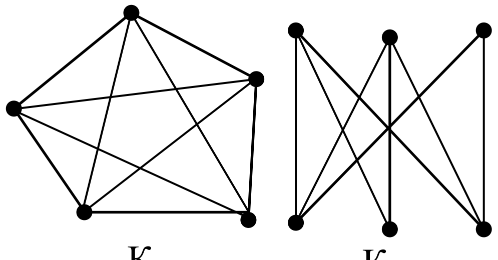
6.4сурет

5.1.5 Граф *жазық* деп аталады, егер жазықтықта оның қабырғалары тек төбелерде ғана қиылысса. Граф планарлы деп аталады, егер оның жазық кескіні болса. 6.3 және 6.4 суреттерде –жазық графтар, 6.2 суретте планарлы граф, себебі оның изоморфты жазық кескіні бар, ол G_3 графы. Ал 6.1 суреттегі граф планарлы да болмайды. Оны келесі теоремадан көруге болады.

6.3 теорема. *Граф планарлы болмайды,сонда және тек қана сонда егер келесі шарттардың бірі орындалса:*

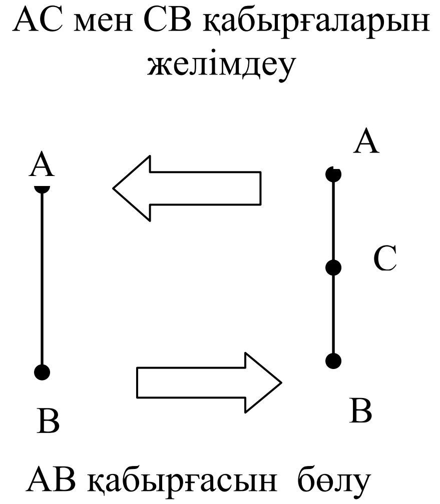
а) (Понтрягин-Куратовский) Графтың толық бес төбелі K_5 немесе $K_{3,3}$ графына (төменде айтылады) гомеоморфты болатын ішкі графы болады;

б) (Харари-Татта) Графты қабырғасын созу арқылы немесе кейбір элементтерін жою арқылы K_5 немесе $K_{3,3}$ графтарына гомеоморфты графқа айналдыруға болады.



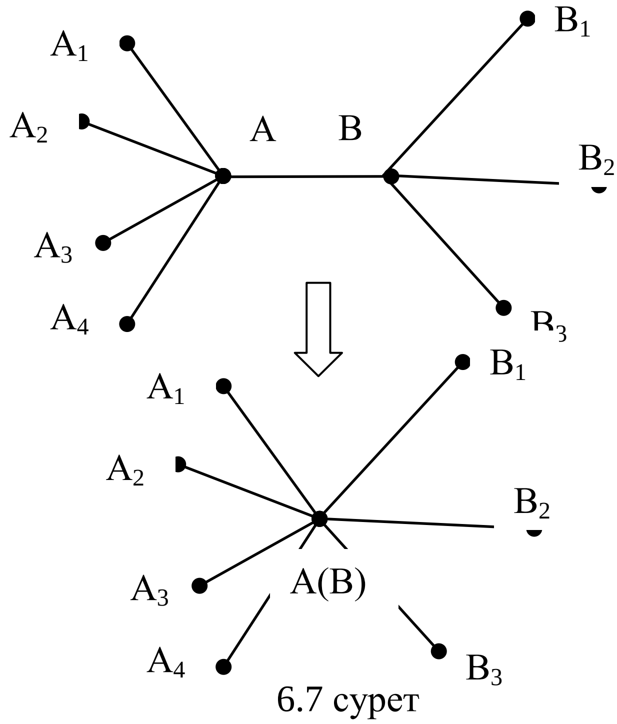
6.5 сурет

Графтар *гомеоморфты* болады, егер біреуі екіншісінен қабырғаларын желімдеу немесе бөлу операцияларының көмегімен алынатын болса (6.6 сурет).



6.6 сурет

АВ қабырғасын созу, АВ қабырғасы жойылады, А және В төбелері бір төбеге айналады және осы жаңа төбе А және В төбелерімен сыбайлас болған барлық төбелермен жалғасады (6.7 суретті қараңыз).



6.7 сурет

6.2 Графтардың матрицалық берілуі

6.2.1 Графтарды сурет түрінде беру үнемі ыңғайлы бола бермейді. Мысалы, ЭЕМ-де оларға операциялар қолдануда. Бұл үшін графтың матрицалық берілу тәсілдері қолайлы. Одай әдістердің бірі сыбайлас матрица әдісі. Егер G графында n төбе болса, онда оның сыбайлас матрицасының M(G)

$= \left\| \mu_{i,j} \right\|_{n\times n}$ жолы және бағанасы болады. Ол үшін i,j орнына яғни, i-жол мен j-бағанаға 1-ді қоямыз, егер G-да i-жолдан j–бағанаға қабырға болса; қарсы жағдайда 0 қоямыз:

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ егер i-жолдан j–ге қабырға болса} \\ 0, \text{ егер i-жолдан j–ге қабырға болмаса} \end{cases}$$

6.2 және 6.3 суреттердегі графтар үшін матрицалар келесідей болады:

$$M(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Мұнда G_3 графында төбелер алфавиттік түрде реттелген деп есептедік, янғи А-бірінші, В-екінші, С-үшінші, т.с.с. G_2 пен G_3 графтары изоморфты ($G_2 \cong G_3$ белгіленеді) болса да, олардың сыбайлас матрицалары әртүрлі. Бірақ осы графтардың изоморфтығын дәлелдеуде біз G_2 графының бірінші төбесіне G_3 графының бірінші төбесін сәйкестікке қойдық, екіншіге – төртіншісін, үшінші-бесіншісін, төртіншіге – екіншісін, ал бесіншіге – үшіншісін. $M(G_2)$ матрицасында алдымен, жолдарын ауыстырамыз, біріншісін орнында қалдырамыз, екіншісін төртіншісінің орнына, үшіншісін – бесіншісінің, төртіншісін – екіншісінің, ал бесіншісін – үшіншісінің орнына қоямыз. Содан кейін дәл осы түрлендіруді бағандарға жасаймыз. Нәтижесінде, $M(G_3)$ матрицасын аламыз:

$$M(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M(G_3).$$

Сыбайлас матрицаны қарапайым граф түрінде де беріге болады, бұнда негізгі диагоналі нөлдер болатын, симметриялы матрица және фультиграф түрінде жазуға болады. Соңғы жағдайда (i,j)-дің орнына басы i-төбеде болатын, соңы j-төбеде болатын қабырғалар санын жазамыз. Мұндағы матрица симметриялы емес болуы мүмкін. Кері есеп - сыбайлас матрицасы бойынша графты салу қиын емес. Жазықтықта n нүкте (жолдары мен бағандарының санына байланысты) белгілейміз, нүктелерді шеңбер бойымен орналастырған ыңғайлы. Егер берілген матрица симметриялы болмаса, онда сәйкес нүктелер бағыттармен жалғанады, қарсы жағдайда – граф бағдарсыз, сондықтан нүктелерді тек сызықтармен қоса саламыз. Егер граф жазық болып кескінделетінін көруге болса, онда олай да салуға болады, бұл сурет графтың планарлығын негіздеуге жеткілікті болады.

6.2.2 Графтардың көптеген қолдануларында қандай төбелері сыбайлас екенін білу аздық етеді, сонымен қатар қайсыбір төбесі мен қабырғасының салмағын білу де маңызды рөл атқарады. Бұл салмақтар берілу жағдайларына байланысты әртүрлі жағдайды білдіреді: ара қашықтық, шығындар, кіріс, жұмыс істеуге кететін уақыт, жағдайдан шығу ықтималдығы т.с.с. Бізге, ереже ретінді қабырғаларының салмағы ғана қажет болады. Егер қосымша төбелер мен қабырғалар енгізсе, онда 6.8 суретте осы операцияға сипатттама береді.

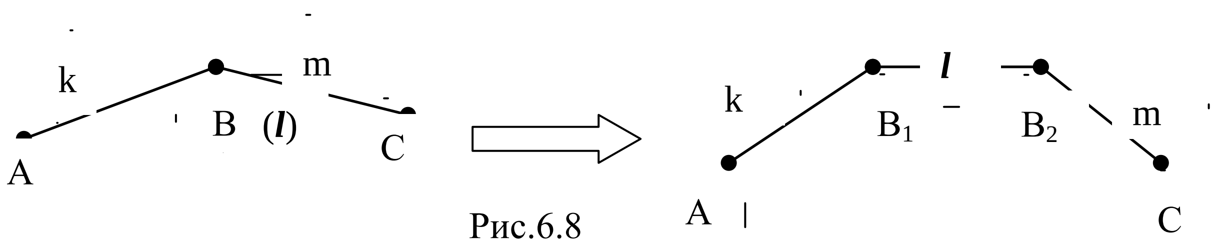


Рис.6.8

Қабырғаларының салмағы берілген графтарды (өлшенетін графтар) салмақтар матрицасы түрінде беру ыңғайлы. Оның сыбайлас матрицадан айырмашылығы i–жолдың j–орнында i–төбеден j–ге баратын қабырғасының салмағы тұрады. Сонымен қатар, i–төбеден j–бағанаға сәйкес келсе, онда салмақтар матрицасындағы сәйкес орында ереже бойынша 0 емес, берілі жағдайына байланысты сызықша, немесе шексіздік немесе минус шексіздік белгісі тұрады. Мысалы, 6.2 суреттегі G_2 графта салмақтар келесідей: $u_1 = 3$, $u_2 = 4$, $u_3 = 2$, $u_4 = 7$, $u_5 = 0$, онда оның салмақтар матрицасы келесідей болады:

$$W(G_2) = \begin{bmatrix} - & 4 & - & 7 & - \\ 4 & - & 3 & 0 & - \\ - & 3 & - & - & 2 \\ 7 & 0 & - & - & - \\ - & - & 2 & - & - \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \infty & 4 & \infty & 7 & \infty \\ 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ 7 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \end{bmatrix}.$$

6.2.3 Кейбір жағдайларда графты *инцидент (түйісу) матрицасы* арқылы берген ыңғайлы болады. Бұл матрица тік бұрышты, онда графта қанша төбе болса, сонша жол болады, ал бағандар саны қабырғалар санымен тең. Оны толтырғанда төбелері ғана емес, қабырғалары да нөмірленеді, және i–ші және j–ші жолдарының k–шы бағаналарына бірлер қойылады, егер k нөмірлі қабырға i–ші және j–ші төбелерді біріктірсе. Қалған орындарға нөлдер қойылады. Графта ілгек (бастапқы және соңғы төбелері беттесетін қабырға) болса, оған сәйкес бағанаға тек бір ғана «1» жазылады. Кейде ыңғайлы болу үшін, оның орнына «2» қояды. L(G) матрицасы 6.9 суреттегі G графының инцидент матрицасы болады.

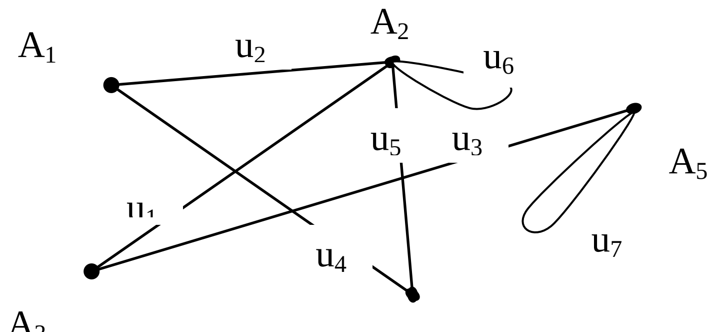


Рис.6.9

$$L(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.3 Іздер мен өтулер

6.3.1 *Жол (тізбе)* – деп графтың қабырғалары екі рет кездеспейтін ізді айтамыз. Мысалы, 6.4 суреттегі G_5 графында $A_1A_2A_3A_1A_6AA_4A_3A_1$ ізі жол болмайды, себебі мұнда A_1A_3қабырғасы екі рет кіріп тұр. Графта Эйлер жолы (өтуі) деп графтың барлық қабырғаларын құрайтын жолды айтады, яғни жолда графтың әр қабырғасы бір рет кездесу керек (төбелеріне қатысты ештеңе айтылған жоқ, сондықтан кез-келген жолда төбелер қайталанып кездесуі мүмкін). Эйлер жолы бар граф *эйлер* графы деп аталады, егер осы жолдың басы мен соңы беттессе, онда граф *эйлер циклі* деп аталады. Жеңіл дәлелденеді.

6.4 теорема. *а) Байланысты граф эйлер циклі деп аталады, сонда және тек қана сонда, егер оның барлық төбелері жұп дәрежелі болса*.

б) Байланысты графта басы A төбесінде, соңы B төбесінде болатын эйлер өтуі болады, сонда және тек қана сонда, егер A мен B төбелерінің дәрежелері тақ, ал қалған төбелерінің дәрежесі жұп болса.

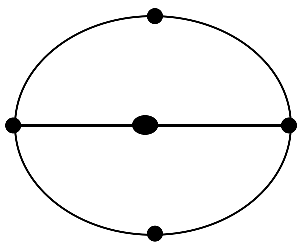
6.3.2 Мағынасы бойынша жақын болатыны – *гамильтондық* граф. *Гамильтондық цикл (жол)* деп бастапқа төбені қоспағанда, графтың әрбір төбесінен бір реттен өтетін (кейбір қабырғалардан мүлдем өтпеуі де мүмкін) циклді (жолды) айтамыз. Эйлер циклі есебінің сыртқы ұқсастығына қарамастан, гамильтондық цикл бар граф анағұрлым күрделі. Қазіргі таңға дейін гамильтондық белгілердің біраз ғана жеткілікті белгілері бар ал, қажетті бергілері әлі де аз.

6.5 теорема. *Байланысты графтың n төбесі болсын.*

а) (Оре). Егер кез-келген төбелер жұбының дәрежелерінің қосындысы n-1 –ден аз емес болса, онда берілген графта гамильтон циклі болады.

б) (Дирак). Егер графтың әр төбесінің дәрежесі n/2-ден аз емес болса, степень каждой вершины графа не менее n/2, берілген графта гамильтон циклі болады.

в) (Хватал) ($d_1, d_2, \dots, d_n$) – G графының вектор-дәрежесі болса және $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$ *,және кез-келген k үшін* $1 \le k \le n/2$ *және* $d_k \le k$ *және* $d_k \ge \ n-k$ *теңсіздігі орындалса, онда G графы – гамильтондық цикл болады.*



6.10 сурет

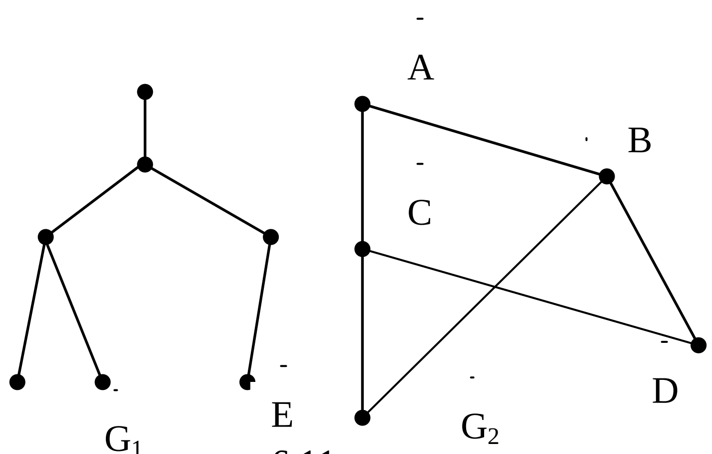
Аспалы төбелері бар графтар, яғни дәрежесі 1-ге тең болатын графтар, гамильтондық емес цикл болып табылады. Сонымен қоса, 6.10 суретте көрсетілген графта гамильтондық цикл жоқ. Одан біртіндеп қабырғаларын бөлу арқылы алынған графғ яғни дәрежесі екіге тең төбелер қосылғанда, *тэтта-граф* деп аталады. Бұдан төмендегі теореманы алуға болады.

6.6 теорема. *Егер графта тэтта-ішкіграф болса, онда ол гамильтондық цикл емес.*

Қарапайым жағдайларда, есептердегі графтар қандай болады, осы екі белгілер графтың гамильтондық еместігін анықтауға толығымен жеткілікті. Егер сызбадан гамильтондық өту көре алсаңыз, оны көрсетіңіз, бірақ, егер 5-теореманы қолдана алсаңыз онда бұл сізге қосымша артықшылықтар болады.

6.4 Ағаштар мен қаңқа

6.4.1 Ағаш–циклсіз байланысты граф. Ағаштар тәжірибеде әртүрлі иерархияларды салуда кездеседі. Графта циклдің болуы оның цикломатикалық санын (әрине, мұнда графтың сызбасымен жұмыс істемейміз) анықтауда көп көмегін тигізеді: $\lambda(G) = m - n + k$, мұндағы m–қабырғалар саны, n – төбелер саны, k – байланыстылық компоненттерінің саны. Мысалы, 6.10 суретте көрсетілген графта бір ғана байланыстылық компоненті болғандықтан, оның цикломатикалық саны 6–5+1=2 болады. 6.11 суреттегі графта байланыстылық компоненттері екеу: G_1 мен G_2 ішкі графтары, сондықтан оның цикломатикалық саны: (6+6)–(7+5)+2=2. Егер әрбір байланыстылық компоненттерін жеке-жеке граф деп қарастырсақ, онда олардың цикломатикалық сандары: $\lambda(G_1) = 6 - 7 + 1 = 0$ және $\lambda(G_2) = 6 - 5 + 1 = 2$.



6.11 сурет

G_1 ағаш болатынын көреміз. Келесі теорема $\lambda(G_1)=0$ теңдігі кездейсоқ емес болғандығын көрсетеді.

6.7 теорема. *Кез –келген графтың цикломатикалық саны –теріс емес сан болады, және ол нөлге тең болады, сонда және тек қана сонда, егер графта цикл болмаса*.

Ағаштардың келесі қасиеттері жиі қолданылады.

6. 8 теорема. *N төбелі ағаштардың эквиваленттi анықтамалары.*

а) N-1 қабырғасы бар және циклсіз граф.

б) N-1 қабырғасы бар және байланысты граф.

в) Байланысты граф және кез-келген қабырғасын жою оны байланыссыз етеді.

г) Кез-келген төбелер жұбы жалғыз ғана жолмен (тізбемен) жалғанады.

д) Циклсіз граф және кез-келген екі төбенің арасына қабырға қосу тек бір ғана цикл қосуға келтіреді.

Байланысты графтың *қаңқасы (арқау, арқаулы ағаш)* деп графтың барлық төбелері ағаштар болатын, ішкі графты айтамыз. Қаңқаны көрсетерде оны құрап тұрған қабырғаларды жазып шығаыд. Мысалы, 6,11 суреттегі G_2 графта (AB), (BD), (DC), (BE) ағашы қаңқа болып табылады. Бір графта бірнеше қаңқа болуы мүмкін екенін көру қиын емес.

6.4.2 Тәжірибелік сабақтар үшін бірқатар маңызды тапсырмаларда (сабақ кестесін құру, құрылғыларды бөліп беруде т.с.с.) графтың төбелерін немесе қабырғаларын бояуға әкеледі. Біз *дұрыс төбелік бояуларды* ғана қарастырамыз, яғни графтың кез-келген сыбайлас төбелері әртүрлі түске боялған жағдайлар. Мұндай дұрыс төбелік бояуларды қысқаша бояулар деп қана айтамыз. Мысалы, 6. 11 суретте G_2 графын үш түске бояуға болады: A, E және D төбелерін бір түспен бояймыз, B мен C төбелерін – басқа түспен бояймыз, үшінші түс қолданылмай қалды. Сонымен, G_2 графы 2-бояулы және 3-бояулы болады. G графы k-бояулы болса, онда k-ның минималды саны осы графтың хроматикалық саны деп аталады және $\chi(G)$ деп белгіленеді.

Жалпы жағдайда хроматикалық санды табуға арналған есептер өте күрделі келеді. Бірақ, төбелер саны аз (10-ға дейін) болса, оны «қолмен» санап есептеуге болады. Мысалы, біз G_2 графының нақты екі бояуын көрдік, кез-келген бос емес, яғни тым болмаса бір қабырғасы бар графты екіден аз түспен бояуға болмайды, сондықтан $\chi(G_2) = 2$. Басқа жағдайларда, нақты бір бояулары көрсетілген соң, қандай жолмен түстер санын кемітуге болатыны көрінбейді, минималды бояу алғанымызды негіздеп алуымыз керек. Бұған келесі жағдай көмектесе алады: 1) n төбесі бар K_n толық графтың хроматикалық саны n-ге тең; 2) K_n толық графының бір қабырғасын жою арқылы алынған графтың хроматикалық саны n – 1-ге тең; 3) жұп төбелі жай циклдің хроматикалық саны 2-ге тең, ал тақ болса – 3-ке тең; 4) тұтас бір графтың хроматикалық саны оның кез-келген ішкі графының хроматикалық санынан кем емес. Сондықтан, мысалы, графы 4түске бояуға мүмкіндік болса және одан K_4 ішкі графын (диагональдары жүргізілген төртбұрыш) көрсеңіз, онда осы графтың хроматикалық саны 4-ке тең болады. Келесі хроматикалық санды бағалаулардың пайдасы зор.

9 теорема. $\Delta(G)$ *белгісі G графының төбелерінің ең үлкен дәрежесін білдірсін. Онда келесі теңсіздіктер орынды болаыд:*

а) $\chi(G) \le 1 + \Delta(G)$*; б) (Брукс) егер G – байланысты және толық емес граф болса және* $\Delta(G) \ge 3$*, онда* $\chi(G) \le \Delta(G)$.

6.4.3 Келесі келтірілетін графтар туралы ұғымдардың тәжірибелік маңызы өте зор. *Белгіленген граф* деп – қабырғасы және/немесе төбесі нөмірленген графтарды айтамыз. Мысалы, 6.2 және 6. 3 суреттердегі G_2 мен G_3 графтары, сәйкесінше изоморфты граф ретінде бірдей болғанмен, A, B, C, D, E төбелерін алфавиттік түрде реттелген деп есептесек, онда олар белгіленген граф ретінде әртүрлі графтар болады.

*Бихроматикалық граф (Кениг графы, екі бөлікті граф) 2–*хроматикалы граф а) графта тақ ұзындықты цикл болмайды, б) графтың төбелер жиынын X_i-дің бір ғана жағынан алынған кез-келген екі төбесі өзара сыбайлас емес болатындай, X_1 және X_2 деп екі бөлікке бөлуге болады деген екі қағидаларға эквивалентті болады. Граф *толық бихроматикалық* (толық екі бөлікті граф) деп аталады, егер оның әртүрлі бөліктерінен алынған кез-келген төбелері – сыбайлас болса. Белгіленуі: $\boldsymbol{K_{m,n}}$, мұндағы, $m=|X_1|$, $n=|X_2|$, мұнда қабырғалар саны $m \cdot n$-ге тең болады.

Көп полюсті желі деп –төбелері белгіленіп көрсетілген орграфты айтамыз. Екі полюсті желі деп – екі белгіленіп көрсетілген төбелері бар желіні айтамыз.

Әлді байланысты орграф (әлді орграф) деп кез-келген екі төбелерінен бір-біріне бағыт бойымен (қабырға бойымен) жетуге болса.

Біржақты байланысты орграф (Біржақты орграф) бұл – кез-келген төбелер жұбы біржақты байланысты болатын, яғни кез-келген төбеден қалған төбелерге қабырға бағытымен, ал кері жол болмауы да мүмкін. *Әлсіз байламды орграф (әлсіз орграф)* деп доғасының бағдарын өзгерткен соң байланысты болып қалатын орграфты айтамыз.

k-байланысқан граф (k-төбелі байланысқан граф) деп кез-келген k-1 төбесін жойған соң, байланысты болып қалатын графты айтамыз. *k-қабырғалы-байланысқан граф* деп кез-келген k-1 қабырғасын жойған соң, байланысты болып қалатын графты айтамыз.

Біртекті (реттелетін k-реттелуші) граф деп барлық төбелерінің дәрежелері бірдей *k*-ға тең болатын графты айтамыз.

(n, m)-граф деп – нақты *n* төбесі бар, *m* қабырғасы бар графты айтамыз.

Қосымша граф ~G графы – G графында қанша төбелер жиыны болса, сонша төбелер жиыны бар граф және ~*G*-дың екі төбесі сыбайлас болады, сонда және тек қана сонда егер осы төбелер *G*-да сыбайлас болмаса.

Глоссарий

1 Жиын – множество – set – анықталмаған ұғым – әртүрлі объектілердің белгілі бір қасиеттерге байланысты жинақталуы;

2 Айнымалдардын сұрыбы - сорт переменных - rate of variables;

3 Ақырлы жиын – конечное множество — finite set;

4 Ақырсыз жиын – бесконечное множество –infinite set;

5 Ақиқаттық кестесі таблица истинности — table of truth;

6 Антирефлексивті (рефлексивті емес) қатынас – антирефлексивное отношение — non-reflexive relation;

7 Антисимметриялы қатынас (симметриялы емес) – антисимметричное отношение – non-symmetric relation;

8 Анықталған пікірлер – определенные высказывания – definite propositions;

9 Әмбебап жиын – универсальное множество – universal set;

10 Әмбебап қатынас – универсальное отношение –universal relation;

11 Әріптік қарапайымдылық индексі - буквенный индекс простоты - alphabetic index of simplicity. Белгіленуі: $L_Б(A)$;

12 Бинарлық қатынас -бинарное отношение –binary relation;

13 Бос жиын – пустое множество – empty;

14 Бірігу – объединение – union; қиылысу – пересечение – intersection ;

15 Бірқалыпты (монотонды) функция- монотонная– monotone function;

16 Бульдік алгебра – булевая алгебра – boolean algebra;

17 Бірмәнді бейнелеу - однозначное отображение - one-to-one mapping;

18 Вебб функциялары – функции Вебба –Webb functions;

19 Графиктік теңдік - графическое равенство - graphic equality;

20 Дәлелдеу –доказательство – proof;

21 Дәреже - жиын – множество-степень –set-power, $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$;

22 Декарттық көбейтінді - декартовое произведение - cartesian product;

23 Дербес (жартылай) реттілік – частичный порядок –- partial order;

24 Дизъюнкция – дизъюнкция - disjunction;

25 Дизъюнктивті қалыпты форма - дизъюнктивная нормальная форма – disjunctive normal form;

26 Елеулі айнымалы – существенная переменная – essential variable:

27 Елеусіз айнымалы - фиктивная переменная –fictitious variable;

28 Жай импликанталар - простые импликанты – simple implikant;

29 Жегалкин көпмүшесі– многочлен Жегалкина- Zhegalkin's polynomial;

30 Жиындардың айырымы – разность множеств - difference of sets;

31 Жиындардың толықтауышы –дополнение множества –complement of;

32 Идемпотенттік – идемпотентность – idempotency: а) $x \wedge x = x$; б) $x \vee x = x$

33 Карно картасы – карта Карно – Carno's map;

34 Кемелденген к.қ.ф. – совершенная к.н.ф. – perfect c.n.f. - ;

35 Кері қатынас – обратное отношение –inverse relation, R^{-1};

36 Конъюнкция – конъюнкция – conjunction;

37 Конъюнктивті қалыпты форма - конъюнктивная нормальная форма - consjunctive normal form;

38 Кортеж - кортеж – cortege;

39 Қайшылықсыз (қарама-қайшылықсыз) теория – непротиворечивая теория –coherent theory;

40 Қиылыспайтын жиындар – непересекающиеся множества - not intersected sets, $X \cap Y = \varnothing$;

41 Қосарланған функция - двойственная функция – dual function;

42 Мәндес (теңбе-тең) формулалар – равносильные формулы –equivalent formulas;

43 n-дік қатынас - n-арное отношение - n-termed relation, $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$;

44 Предикат – предикат - predicate;

45 Предикаттың анықталу облысы – область определения предиката - domain of predicate;

46 Пікірлер алгебрасы - алгебра высказываний – propositional algebra;

47 Пікірлерді есептеу -исчисление высказываний - propositional calculus;

48 Пікірлердің импликациясы -импликация высказываний - propositional implication;

49 Пікірлерді теріске шығару (терістеу) – отрицание высказывания - negation of propositions;

50 Пікірлердің эквиваленттігі – эквивалентность высказываний - equivalence of propositions;

51 Реттелген жұптар – упорядоченные пары –ordered pairs;

52 Рефлексивті қатынас – рефлексивное отношение – reflexive relation;

53 Симметриялы қатынас–симметричное отношение–symmetric relation;

54Симметриялы айырым-симметрическая разность-symmetric difference;

55 Сызықтық реттілік қатынасы - отношение линейного порядка –linear order relation;

56 Тавтология – тавтология – tautology;

57 Теорема - теорема – theorem;

58 Тең жиындар – равные множества –equal sets;

59 Транзитивті қатынас – транзитивное отношение - transitive relation

$xRy,\ yRz \Rightarrow\ xRz$ (басқаша, $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R \Rightarrow\ (x,z)\in R$);

60 Тұйықталу - замыкание – closure;

61 Ішкі жиын – подмножество –subset; $A \subseteq B$

62 Өтрікші парадоксі – парадокс лжеца – liar paradox;

63 Элементтің бейнесі - образ элемента – image of element;

64 Формальды теория – формальная теория – formal theory;

65 $\forall$ - жалпылау кванторы – квантор всеобщности - universal quantifier;

66 $\exists$–бар болу кванторы - квантор существования –existential quantifier;

67 Ортақ мәндегі формулалар–общезначимые формулы- general meaning formulas;

68 $x \oplus y$ 2 модулі бойынша қосу – сложение по модулю 2 – 2[nd] addition on the module;

69 x | y – Шеффер сызығы - штрих Шеффера – Sheffer stroke;

70 x ↑ y – Пирс бағыты - стрелка Пирса –Peirce arrow;

71 Элементар конъюнкция - элементарная конъюнкция – elementary conjunction;

72 Элементар дизъюнкция - элементарная дизъюнкция – elementary disjunction;

73 Функциялардың суперпозициясы - суперпозиция функции – function superposition;

74 Функциялардың толық жиынтығы - полный набор функций – total set of functions;

75 S-Қосарланған функциялар класы - класс самодвойственных функций - class of self-dual functions;

76 Ағаш – дерево –tree - связный граф без циклов;

77 Байланысты граф – связной граф –connected graph;

78 Байланысты графтың қаңқасы – каркас связного графа - frame of connected graph;

79 Бағдарланбаған граф - неориентированный граф - directed graph;

80 Бағдарланған граф - ориентированный граф - directed graph;

81 Белгіленген граф - помеченный граф – marked graph;

82 Бихроматикалық граф (екі бөлікті граф) –двудольный граф 2-хроматический граф – bichromatic graph;

83 Бос граф – пустой граф –empty graph. Қабырғасы жоқ граф;

84 Біртекті граф - однородный граф –homogeneous graph;

85 Граф – граф – graph;

86 Графтың радиусы –радиус графа – radius of;

87 Графтың диаметрі – диаметр графа –diameter of graph;

88 Гамильтондық цикл – Гамильтоновый цикл –Hamilton's cycle;

89 Гомеоморфты граф - гомеоморфный граф - homeomorphic graph;

90 Жазық граф - плоский граф - flat graph;

91 Инцидент матрица – матрица инцидентности –matrix of incidence;

92 Қабырғалар жиыны - множество ребер - set of edges;

93 Қима ережесі – правило отсечения (modus ponens) - implication elimination;

94 Қарапайым граф - обыкновенный граф –simple graph;

95 Қосалқы граф – дополнительный граф –additional graph;

96 Планарлы граф - планарный граф - planar graph;

97 Сыбайлас матрица -матрица смежности - contiguity matrix;

98 Толық граф – полный граф –full graph;

99 Төбе эксцентриситеті– эксцентриситет вершины - eccentricity of vertex;

100 Төбенін дәрежесі – степень вершины –degree of vertex;

101 Төбелер жиыны - множество вершин – set of vertices;

102Эйлер жолы – Эйлеровый путь –Euler's way;

103 Хроматиялық сан - хроматическое число - chromatic number: $\chi(G)$;

104 k-байланысқан граф – k-связный граф –k-connected graph - граф;

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

2 Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

3 Березина Л.Ю. Графы и их применение. М.: Просвещение, 1979.

4 Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.– М.: Наука, 1992.

5 Горбатов С.Г. Фундаментальные основы дискретной математики.– М.: Наука, 2000.

6 Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. – М.: Наука, 1985.

7 Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов. – Новосибирск: Наука, 1999.

8 Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов.– М.: Наука. 1990.

9 Зыков А.А. Основы теории графов.– М.: Наука. 1987.

10 Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. СПб: БХВ-Петербург, 2004.

11 Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров.–М., Энергия, 1980.

12 Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.

13 Латкин И.В. Лемма о дополнении граничными точками. //Региональный вестник Востока, №4(8), 2000, С. 48–50.

14 Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976.

15 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.–СПб: Питер, 2001.

16 Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Дискретная математика. Москва – Новосибирск: ИНФРА-М – НГТУ, 2007.

17 Хисамиев З.Г. Дискретная математика. Часть1. Булевы функции.– Усть-Каменогорск, ВКТУ, 1998.

18 Хисамиев Н.Г., Хисамиев А.Н. Элементы математической логики. – Усть-Каменогорск, ВКГТУ, 2001.

19 Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.– М., Наука, 1999.